2011年度 解析力学1 試験問題

(2011年7月27日)

注意: 各答案用紙には、学生番号、氏名、(理学部以外の場合は学部名) を記入すること。また、答案用紙は重ねて2つに折り提出すること。

I. (基本問題)

力学変数が $q(t) = \big(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t)\big)$ の N 自由度系を考える。この系の Lagrangian を $L(q, \dot{q}, t)$ とする。以下の設問に答えよ。

(1) 最小作用の原理から Euler-Lagrange 方程式を導け。

(2) Noether の定理は

> Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ が対称性を持っている、即ち、L が力学変数 $q(t)$ のある微小変換に対して (時間についての全微分項を除き) 不変であると、それに対応した保存量 (時間に依らず一定である量) が存在する。

という内容であった。今、考える微小変換 $q_i(t) \to q_i(t) + \delta q_i(t)$ は一種類のみで

$$\delta q_i(t) = F_i\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\,\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ は微小定数})$$

の場合に、この定理を証明し、保存量を導け。

(3) 上の **(2)** の例として、Lagrangian の時間に対する陽な依存性がなく、$L = L(q, \dot{q})$ の場合、時間並進の対称性に対応した保存量 (=エネルギー) を導け。

II. (Lagrangian の不変性と保存量)

3次元空間における2質点系を考える。二つの質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_1(t)$ および $\boldsymbol{x}_2(t)$ として、Lagrangian は次式で与えられるとする:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^2 - U\big(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|\big)$$

ここに、$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| = \sqrt{(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2}$ (2質点間の距離) である。

(1) L は原点周りの空間回転に対して不変である。以下の設問に答えよ。

(1-1) 微小空間回転に対して位置ベクトル $\boldsymbol{x}_1(t)$ と $\boldsymbol{x}_2(t)$ がどのように変化するかを一般的に表わせ。

(1-2) この微小空間回転の下で L が不変であることを説明せよ。

この問題は裏面に続く

(1-3) L が空間回転対称性を持つことから、それに対応した保存量を導け。
(結果だけではなく、導出を書くこと。Noether の定理の保存量の公式を用いても、また、講義において "初等的導出" として紹介した方法でもよい。)

(2) L はガリレイ変換 (=等速直線運動する別の座標系に移る変換) に対しても、(時間に関する全微分項を除き) 不変である。$\boldsymbol{x}_1(t)$ および $\boldsymbol{x}_2(t)$ に対するガリレイ変換の一般形 (微小には限らない) を与え、この事実を示せ。

III. (Lagrange の未定乗数法)

力学変数が $x(t)$ と $y(t)$ の系を考える。この系の Lagrangian は $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ で与えられるが、$x(t)$ と $y(t)$ にはある関数 $C(x, y)$ を用いた

$$C\big(x(t), y(t)\big) = 0 \tag{A}$$

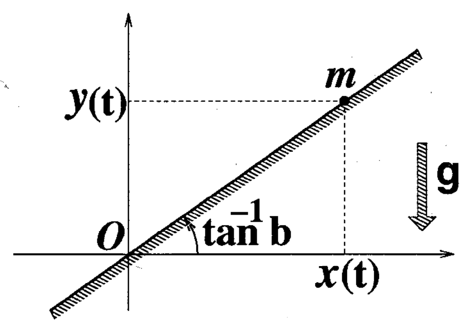
なる拘束条件が課せられている。以下の設問に答えよ。

(1) 拘束条件 (A) の下で作用 $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ を極小にする配位は、新たな時間の未知関数 (Lagrange の未定乗数) $\lambda(t)$ を導入した次の運動方程式、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial C}{\partial x}\ , \tag{B}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial C}{\partial y}\ , \tag{C}$$

および拘束条件 (A) を解くことにより得られる。このことを示せ。

この応用として、図のように傾きが b (傾斜角が $\tan^{-1} b$) の斜面を、質点 (質量 m) が摩擦なしに滑り落ちる過程を、質点のデカルト座標 $(x(t), y(t))$ を用いて考える。斜面は原点 O $(0, 0)$ を通り、y 方向が鉛直上方であり、重力加速度を g とする。また、時刻 $t = 0$ における初期条件を、$x(0) = a$ および $\dot{x}(0) = 0$ ($y(0)$ および $\dot{y}(0)$ は、拘束条件から決まるもの) とする。



(2) $(x(t), y(t))$ を用いたこの系の Lagrangian $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$、および、拘束条件の関数 $C(x, y)$ を与えよ。

(3) 拘束条件 (A) および Lagrange の未定乗数法を用いた運動方程式 (B) と (C) を解き、$x(t)$ と $y(t)$ を求めよ。更に、斜面から質点に働く力 (抗力) の x 成分および y 成分を、未定乗数 $\lambda(t)$ と関連させて求めよ。