2011年度 解析力学2 試験問題

(2012年1月25日)

注意: 各答案用紙には、学生番号、氏名、(理学部以外の場合は学部名) を記入すること。答案用紙は重ねて2つに折り提出すること。

I. (Hamiltonの運動方程式)

力学変数が $q = \left(q_1, q_2, \cdots, q_N\right)$ の N 自由度系を考える。この系の Lagrangian を $L(q, \dot{q}, t)$ とする。以下の設問に答えよ。なお、力学変数の index (q_i の i 等) は省略せずに明記すること。Einstein の縮約ルールは用いてよい。

(1) この系の Euler-Lagrange 方程式を書け。(導出は不要。)

(2) Euler-Lagrange 方程式から Hamilton の運動方程式を導け。なお、式変形の各段階の説明を丁寧に書くように。

(3) 例として、(x, y) を力学変数とし、Lagrangian が次式で与えられる2自由度系を考える:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\omega\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

なお、これは平面上の自由質点の Lagrangian を、慣性系に対して角速度 ω で回転する座標系 (x, y) で表わしたものである。

3-1) (x, y) に対応した運動量を (p_x, p_y) として、この系の Hamiltonian $H(x, y, p_x, p_y)$ を求めよ。

3-2) Hamilton の運動方程式 (4本) を書き下せ。(解く必要はない。)

裏面に第2問と第3問がある

II. (正準変換)

(q,p) を正準変数とする1自由度系における正準変換 $(q,p)\to(Q,P)$ を考える。以下の設問に答えよ。解答は、p(小文字) と P(大文字) がはっきりと区別出来るように書くこと。

(1) $H(q,p,t)$ を (q,p) の Hamiltonian とすると、$(q,p)\to(Q,P)$ が正準変換であるためには、

$$p\dot{q}-H(q,p,t)=P\dot{Q}-K(Q,P,t)+\frac{d}{dt}F(q,Q,t)$$

が恒等的に成り立つような母関数 $F(q,Q,t)$ が存在すればよく、$K(Q,P,t)$ が新正準変数 (Q,P) の Hamiltonian であった。このことから、母関数 $F(q,Q,t)$ を用いた新旧正準変数の間の関係式、および、両 Hamiltonian H と K の間の関係式を導け。

具体例として、(q,p) と (Q,P) が、ある実定数 a および b を用いて次式で関係しているとする:

$$q=aP^b\sin Q,\qquad p=aP^b\cos Q$$

(2) 講義では、基本 Poisson bracket が不変であること、すなわち、$\{q,p\}=\{Q,P\}$、が今の変換が正準変換であるための必要条件であることを示した。このことから定数 a と b を決定せよ。なお、a は正 $(a>0)$ とする。

以下では、a と b は **(2)** で与えたものとする。

(3) $(q,p)\to(Q,P)$ は実際に正準変換である。この母関数 $F(q,Q)$ を求めよ。

(4) (q,p) の Hamiltonian が

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\left(p^2+q^2\right)$$

で与えられるとする。新正準変数 (Q,P) で Hamilton の運動方程式を解くことにより、元の $q(t)$ と $p(t)$ の一般解を求めよ。

III. (Hamilton-Jacobi 方程式)

一様な重力下で鉛直上方に投げ上げた質点の運動を Hamilton-Jacobi 理論を用いて考える。重力加速度を g、質点の質量を m とし、鉛直上向きに y 軸をとる。

(1) この系の Lagrangian $L(y,\dot{y})$ および Hamiltonian $H(y,p)$ を与えよ。なお、p は y に対応した運動量とする。

書くだけでよい。

(2) この系の Hamilton-Jacobi 方程式を与えよ。但し、主関数を $S(y,t)$ とせよ。

(3) この質点の運動の初期条件を、時刻 $t=0$ で $y=0$ および $\dfrac{dy}{dt}=v$ とする。
前問 **(2)** の Hamilton-Jacobi 方程式を解き、運動方程式の解 $y(t)$ を求めよ。
(なお、もちろん $y(t)$ は運動方程式を直接解くことにより求まるが、この問題では Hamilton-Jacobi 方程式を用いた解法の場合のみ点数を与える。)