

微分積分学 A(月1・2 担当:小西由紀子) 期末試験 (2010/7/26).

問題1 (10点). 次の数列が上に有界かつ単調増加であることを示し, 極限を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$$

問題2 (各5点). 次の極限を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$$

問題3 (各5点). 次の関数を微分せよ.

$$(1) \log |\log |x|| \quad (2) \tan^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) \quad (3) 2^x$$

問題4 (各5点). 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{2dx}{(x-1)(x^2+1)} \quad (2) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

問題5 (各5点). 次の広義積分は収束するか. 収束する場合にはその値を求めよ. ただし λ は実数とする.

$$(1) \int_0^1 x^\lambda dx \quad (2) \int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

問題6 (5点). $\cos x$ のマクローリン展開を求めよ.

問題7 (5点). 複素数 z, w に対して不等式

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

が成り立つことを示せ.

裏面に続きます

問題8 (10点). $f(x) = \sin^{-1}x$ とする.

(1) $(1-x^2)f''(x) = xf'(x)$ を示せ.

(2) 次の式を示せ:

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

問題9 : アステロイド (10点). $a > 0$ とする. 媒介変数表示

$$x(t) = a \cos^3 t, \quad y(t) = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

で定まる曲線を C とする.

(1) C と x 軸, y 軸の囲む図形の面積を求めよ

(2) C の長さを求めよ.

問題10 : Jensen の不等式 (10点). $\varphi(x)$ は区間 $[0, A]$ において C^2 級で下に凸とする.

(1) $c \in [0, A]$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\varphi(x) \geq \varphi(c) + \varphi'(c)(x-c) \quad (x \in [0, A])$$

(2) $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上の連続関数で $0 \leq f(x) \leq A$ を満たすとする. このとき次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx$$