微分積分学 B 試験問題（２０１０年度後期　　担当 吉川謙一）

(I) a, b を定数とし, 関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \sin(e^{ax^2+by^2}) - \sin(1)$ で定める.

(1) f_x, f_y, f_{xy} を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の原点における Taylor 展開を 2 次の項まで求めよ.

(II) α, β を定数とする. 平面 $\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ を

$$P(x,y) = 5x^4 + 2xy^3 + \alpha y^2, \qquad Q(x,y) = \beta x^2y^2 + 4xy + 4y^3$$

とする. 条件 $F_x(x,y) = P(x,y)$, $F_y(x,y) = Q(x,y)$ を充たす $\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 $F(x,y)$ が存在するように定数 α, β を定め, その時の $F(x,y)$ を一つ求めよ.

(III) A, B, C を定数とする. 次の広義積分を A, B, C を用いて表せ.

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{A + Bx^2 + Cy^2}{(1+x^2+y^2)^3}\, dxdy$$

(IV) $\mathbf{R}^2$ の部分集合 S を以下の式で定める.

$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\, x^3 + y^3 - 3x - 3y = 4\}.$$

S 上の関数 $x^2 + y^2$ は S において最小値 m を持つ事を示し, m の値を求めよ. 但し, S が閉集合である事を仮定して良い.

(V) $f(x,y)$ は平面 $\mathbf{R}^2$ の領域 D 上の C^∞ 級関数とする. 以下, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ が D 上で成り立つと仮定する.

(1) $f(x,y)$ が D の点 (a,b) において極値を取るための必要充分条件を $f_{xx}(a,b)$, $f_{yy}(a,b)$, $f_{xy}(a,b)$ を用いて表せ.

(2) $f(x,y)$ が D 上で $f_{xx} + f_{yy} = 0$ を充たすならば, $f(x,y)$ は D において極値を取らない事を示せ.