$-5e^{-3t}$
$-2e^{4t}$

微積分学続論 B（2011 年度後期）試験問題

大鍛治先生

(*2012* 年 *1* 月 *25* 日 *3* 限)

1 初期値問題 ん?

$$\frac{dy}{dt} = t\sqrt{1-y},\ y(0) = 1$$

について、$y(t) = 1$ 以外の解を求めよ。

$y = -\frac{1}{16}t^4 + 1$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}t^3$

$t\sqrt{1-y} = t \cdot \frac{t^2}{4} = \frac{t^3}{4}$

2 微分方程式

$$L[y] = \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0,\ t \in \mathbf{R} \qquad (☆)$$

について次の各問に答えよ。

(1) 方程式 (☆) の解で初期条件 $y(0) = 0,\ \dfrac{dy}{dt}(0) = 1$ を満たすもの $y = y_0(t)$ を求めよ。

(2) $f(t)$ は $\mathbf{R}$ 上の連続関数で

$$\int_0^\infty |f(s)|ds < +\infty$$

を満たす。このとき、微分方程式

$$L[y] = f,\ t \in \mathbf{R}$$

の解で初期条件 $y(0) = \dfrac{dy}{dt}(0) = 0$ を満たすものは

$$y(t) = \int_0^t y_0(t-s)f(s)ds$$

で与えられ、さらに、

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

が成り立つことを示せ。

$y = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$

$y' = \frac{1}{2}(-e^{-t} + 3e^{-3t})$

$y'' = \frac{1}{2}(e^{-t} - 9e^{-3t})$

3 $a,\ b$ を正数とするとき、微分方程式系に対する初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = x - 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + 2y,\ x(0) = a,\ y(0) = b$$

の解を $(x(t), y(t))$ とする。このとき、正定数 $a,\ b$ がどのような条件を満たせば

$$\lim_{t\to\infty}\left(\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2\right) = 0$$

が成り立つか？

$4 = 1 + 3$

$3e^{-t},\ 2e^{4t}$

$-4 = -2 - 2$

$-3 = 3 - 6 = -3$

$-2 = -6 + 4 = -2$