微分積分学続論A（小西）期末試験 (2011/7/27)

問題 1. (各7点)

(1) ベクトル場 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha xy - z^3 \\ (\alpha - 2)x^2 \\ (1-\alpha)xz^2 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ を満たす定数 α を求めよ.

(2) C^2 級スカラー場 $f(x, y, z)$ に対し，$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = \mathbf{0}$ を示せ.

問題 2. (10点) 次の微分方程式の一般解 $\varphi(r)$ を求めよ．ただし $\varphi(r)$ の定義域は $r > 0$ とする.

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\Big)\varphi(r) = 0 \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2})\ .$$

問題 3. (各8点) 次の重積分，広義積分を計算せよ.

$$(1) \quad \iint_D x\, dxdy\ , \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}\ .$$

$$(2) \quad \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy\ . \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\ , (x, y) \neq (0, 0)\}\ .$$

問題 4. (15点) パラメータ付き曲線 $x(t) = \sqrt{2}\cos t,\ y(t) = \sqrt{2}\sin t,\ z(t) = t$ について，$t = 0$ から $t = a$ $(a > 0)$ までの弧長と，点 $(x, y, z) = (1, 1, \frac{\pi}{4})$ での接線の方程式を求めよ.

問題 5. (15点) 曲面 $z = x^2 + y^2$ について次の問に答えよ.

(1) 平面 $2x + 2y + z = k$(定数) が接平面となる曲面上の点を求めよ.

(2) $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たす部分の面積を求めよ.

問題 6. (各10点) ベクトル場 $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y^3 \\ 0 \\ z^3 \end{pmatrix}$ について次の線積分，面積分を計算せよ.

(1) $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 1)$ のはる三角形の周 C での線積分．C の向きは $P \to Q \to R \to P$ と進む向きとする.

(2) 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上での面積分，S の向きは外向きとする.

問題 7. (10点) D を (境界 ∂D が区分的に滑らかな)xy 平面の閉領域とし，原点 $(0, 0)$ は D の境界 ∂D 上にないと仮定する．このとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{\partial D} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} 2\pi & ((0, 0) \in D) \\ 0 & ((0, 0) \notin D) \end{cases}$$

ただし ∂D の向きは D の内部を左手に見ながら進む向きとする.