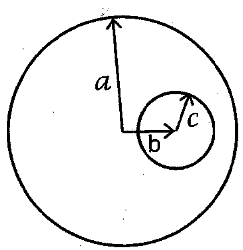
電磁気学続論　演習問題

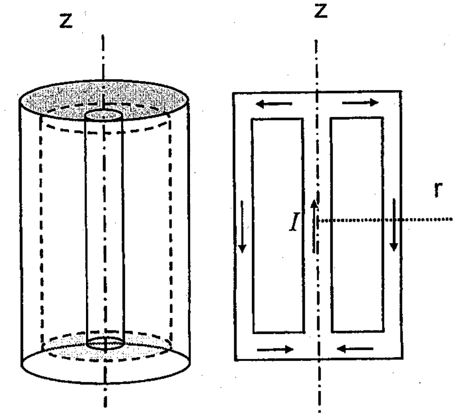
5月10日(火曜)提出

問1
図に示すように、半径 a の円形断面を持つ導体を考える。中心から b の位置を中心として半径 c の円形断面を持つ穴が開いている。この導体に電流 I が流れているとき、中空部の中心に発生する磁場を求めよ。軸方向の長さは無限に長く、電流密度は断面にわたって一様であるとする。



問2
半径 a の円形断面を持つソレノイドに電流 I が流れている。ソレノイドは密に巻いてあり、その長さ L は a に較べて十分長くて、ソレノイドの中央部の磁場 B は一様であるとする。ソレノイドの巻き数を N とする。このとき
（1） ソレノイド中央部の磁場をもとめよ。
（2）両端の開口部での軸方向の磁場成分を求めよ。

問3
（1）
右図に示すように半径 a の中心導体柱と、内径b 外径c の外壁とでなる軸対称の同軸状立体回路に電流 I が周回している。赤道面上に発生する磁場B を半径 r の関数として求め、グラフに描け。赤道面上では電流密度ベクトルの向きは軸に平行であり、一様であるとする。



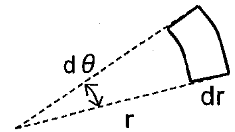
（2）
上記で求めた磁場が中心導体部、外中空部、外導体部において、それぞれ、アンペールの式

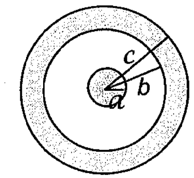
$$\nabla \times \mathbf{B} \equiv rot\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

をみたすことを示せ。

ヒント：円柱座標を用い、図の微小ループに沿ってBの循環を計算する。ストークスの定理により

$$\oint_{\text{微小ループ}} \mathbf{B} \bullet d\vec{\ell} = rot\mathbf{B} \bullet \hat{n} da$$





問4　ベクトルの掛け算

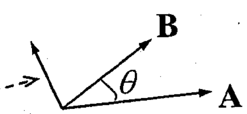
内積（スカラー積）

幾何学的定義　$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = AB\cos\theta$ から出発して

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

と書けることを示せ。

$\hat{n}_{A\times B}$ （**A, B** がつくる面に垂直な単 位ベクトル。向きはA ⇒ Bの向きの回転に関して右ねじが進む方向）



ベクトル積

幾何学的定義　$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\sin\theta\, \hat{n}_{A\times B}$ から出発して

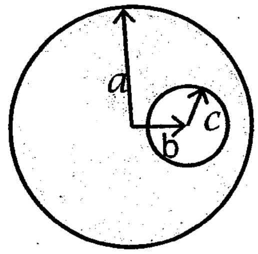
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

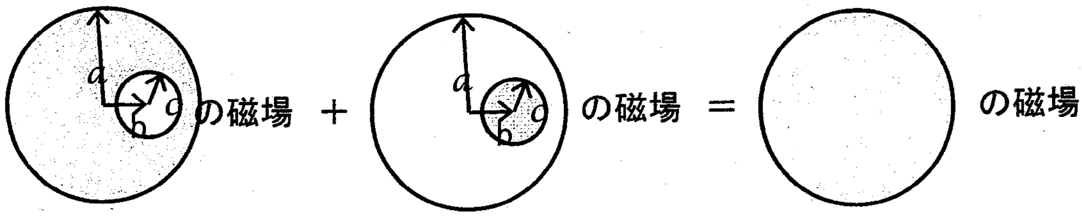
と書けることを示せ。

解答例

問1

図に示すように、半径 a の円形断面を持つ導体を考える。中心からｂの位置を中心として半径 c の円形断面を持つ穴が開いている。この導体に電流Ｉが流れているとき、中空部の中心に発生する磁場を求めよ。軸方向の長さは無限に長く、電流密度は断面にわたって一様であるとする。





小円の中心での磁場はゼロ。求める磁場は中空部も埋まって同一電流密度で電流が流れている場合の磁場に等しい。

電流密度は　$j = \dfrac{I}{\pi\left(a^2 - c^2\right)}$

半径ｂの円内を流れる全電流は　$I_b = \pi b^2 j = \dfrac{b^2}{a^2 - c^2} I$

求める磁場は　方位角方向を向いていて

$$B = \frac{\mu_0 I_b}{2\pi b} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{b}{a^2 - c^2} I$$

問2

半径 a の円形断面を持つソレノイドに電流Ｉが流れている。ソレノイドは密に巻いてあり、その長さＬは a に較べて十分長くて、ソレノイドの中央部の磁場Ｂは一様であるとする。ソレノイドの巻き数をＮとする。このとき

（1）ソレノイド中央部の磁場をもとめよ。
（2）両端の開口部での軸方向の磁場成分を求めよ。

(1)　$B = \dfrac{\mu_0 N}{L} I$　軸方向を向いていて径 方向には一様である。

(2)　同じソレノイドがもう 一つあるとして、これ をもとのソレノイドに つなぐと 2倍の長さのソレノイド になるので、中央部の 磁場はもとのソレノイ ドの中央部と同一である。この中央 部はもとのソレノイド の端での磁場を2倍にしたものであるの で中央部の磁場のち ょうど半分である。

問4

幾何学定義より分配則

$\mathbf{A}\bullet(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\bullet\mathbf{B} + \mathbf{A}\bullet\mathbf{C}$　および　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\bullet\mathbf{C} = \mathbf{A}\bullet\mathbf{C} + \mathbf{B}\bullet\mathbf{C}$

$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$　および　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{C} + \mathbf{B}\times\mathbf{C}$

が成立することを示し。

成分表示

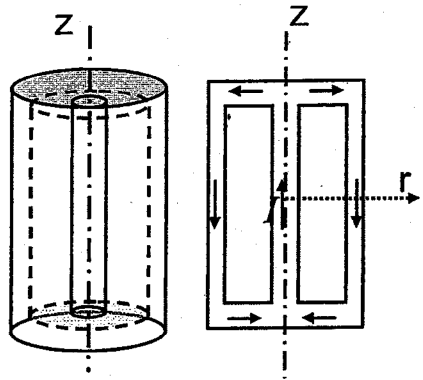
$\mathbf{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z},\quad etc$

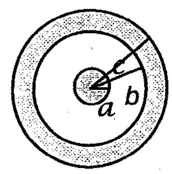
を用いた演算に適用する。

問3

(1)

右図に示すように半径 a の中心導体柱と、内径b 外径c の外壁とでなる軸対称の同軸状立体回路に電流 I が周回している。赤道面上に発生する磁場B を半径 r の関数として求め、グラフに描け。赤道面上では電流密度ベクトルの向きは軸に平行であり、一様であるとする。





中心円柱導体での電流密度は　$j_a = I/\pi a^2$

外殻円筒部での電流密度は　$j_{bc} = I/\pi\left(c^2 - b^2\right)$

$0 \le r \le a$ における磁場は　$B = \dfrac{\mu_0 \pi r^2 j_a}{2\pi r} = \mu_0 \dfrac{r}{2\pi a^2} I$

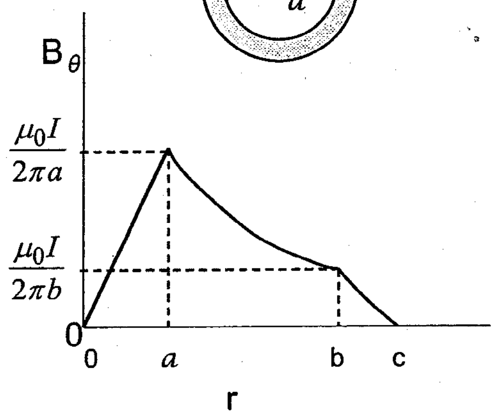
$a \le r \le b$ における磁場は　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$b \le r \le c$ における磁場は

$$B = \frac{\mu_0\left(I - \pi\left(r^2 - b^2\right) j_{bc}\right)}{2\pi r} = \mu_0 \frac{1 - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}}{2\pi r} I$$

$c < r$ における磁場は　$B = 0$

磁場はいずれも周回方向を向いている。



(2)

上記で求めた磁場が中心導体部、外中空部、外導体部において、それぞれ、アンペールの式

をみたすことを示せ。　$\nabla \times \mathbf{B} \equiv rot\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

$$\int_{\delta S} rot\mathbf{B} \bullet \hat{n} da = \oint_{\text{微小ループ}} \mathbf{B} \bullet d\vec{\ell}$$

$$\int_{\delta S} rot\mathbf{B} \bullet \hat{n} da = \int_{\delta S} \mu_0 \mathbf{j} \bullet \hat{n} da = \mu_0 j \cdot \delta S = \mu_0 j \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$\oint_{\text{微小ループ}} \mathbf{B} \bullet d\vec{\ell} = -B(r) r d\theta + B(r + dr)(r + dr) d\theta = -B(r) r d\theta + \left\{B(r) + \frac{\partial B}{\partial r} dr\right\}(r + dr) d\theta$$

$$= B(r) dr d\theta + \frac{\partial B}{\partial r} dr r d\theta = \left(\frac{B}{r} + \frac{\partial B}{\partial r}\right) \cdot r d\theta \cdot dr$$

よって、 $\mu_0 j = \dfrac{B}{r} + \dfrac{\partial B}{\partial r} \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rB)}{\partial r}$　が成立しているはずである。

$0 \le r \le a$　では　$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rB)}{\partial r} = \mu_0 \dfrac{I}{\pi a^2} = \mu_0 j_a$

$a < r < b$ および $c < r$　では　$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rB)}{\partial r} = 0$

$b < r < c$　では　$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rB)}{\partial r} = -\mu_0 \dfrac{I}{\pi\left(c^2 - b^2\right)} = -\mu_0 j_{bc}$