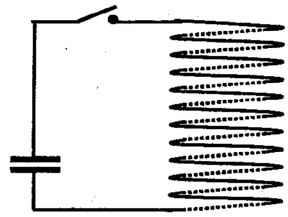
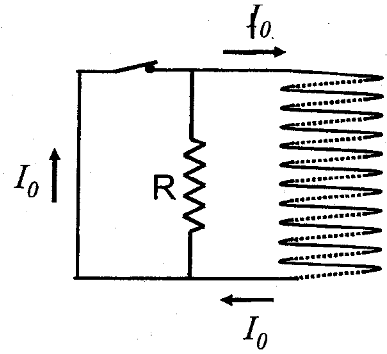
電磁気演習2

問1：　コンデンサー(静電容量C)に電荷Q_0が蓄積されて　いる。コイル（インダクタンスL)との間のスイッチを閉じた後のコンデンサの電荷Qと回路を流れる電流Ｉを時間の関数として表せ。抵抗はゼロでエネルギーの散逸は無いものとする。

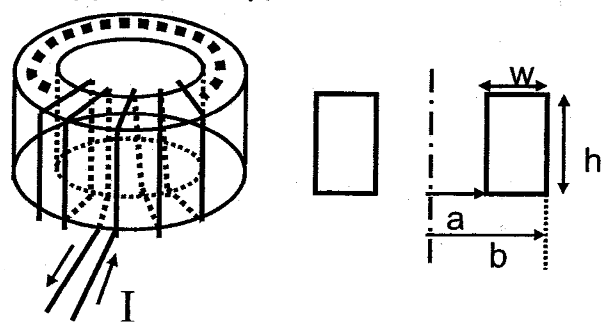


問2　:電流 I_0が流れているコイル（インダクタンスL)を含む右図の回路がある。この回路には抵抗は無く、電流は一定に保たれ減衰しない。回路のスィッチを開き電流を強制的に抵抗Rに転流すると電流は減衰する。そのときの電流を時間の関数として表せ。



問3
(1)右図のトロイダルソレノイド(巻数N)の内部磁場を対称軸からの距離rの関数として表せ。
(2)このソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。

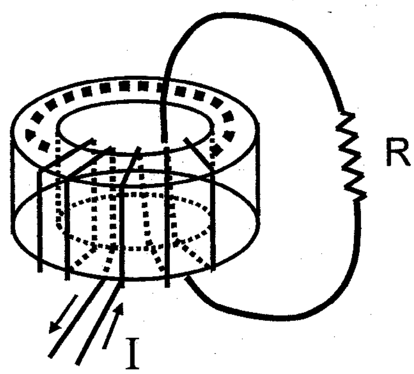
トロイダルソレノイド



問3 (つづき)
(3)このトロイダルソレノイドを貫通するループに抵抗Rを直列に取り付ける。トロイダルソレノイドに交流電流

$$I=I_0\cos(\omega t)$$

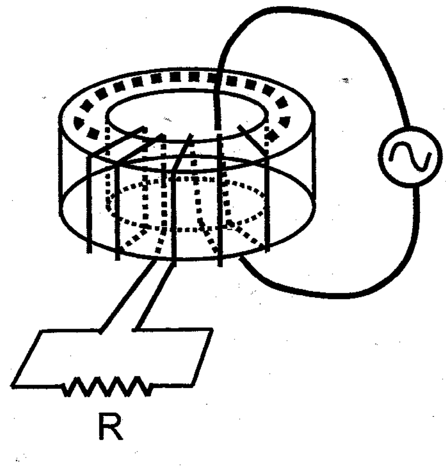
を流したとき、抵抗Rに流れる電流を求めよ。ループの自己インダクタンスは小さくて、自己誘導電圧の効果は無視できるものとする。



(4)　逆にトロイダルソレノイドに抵抗Rを直列に取り付け、ループには交流電源を取り付け、交流電流

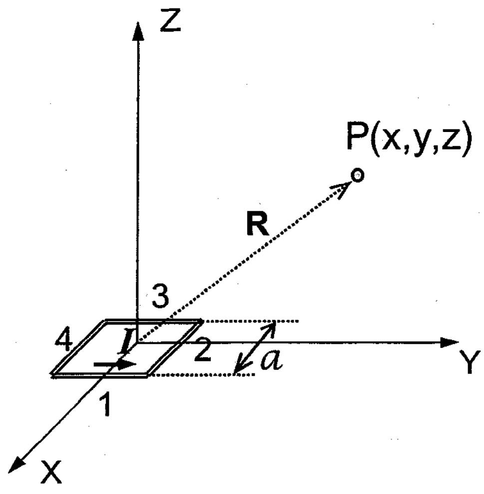
$$I=I_0\cos(\omega t)$$

を流す。このとき抵抗Rにも交流電流ｉが流れる。抵抗Rが非常に大きく、ｉが小さく、ソレノイドの自己誘導電圧が無視できるとしてi を求めよ。無視できない場合についてはどうか？
ソレノイド自身の抵抗は無視できるものとする。



問4: 双極子磁場

図のように正方形電流ループ(電流 I)がxy面上の原点に置いてある。辺の長さaに比べて観測点Pまでの距離がはるかに長いとしてこの電流ループが観測点Pにつくるベクトルポテンシャルを近似的にもとめよ。
さらに磁場をもとめよ。



ヒント：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_2)}{r_{12}} dVol_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{Id\vec{\ell}}{r_{12}}$$

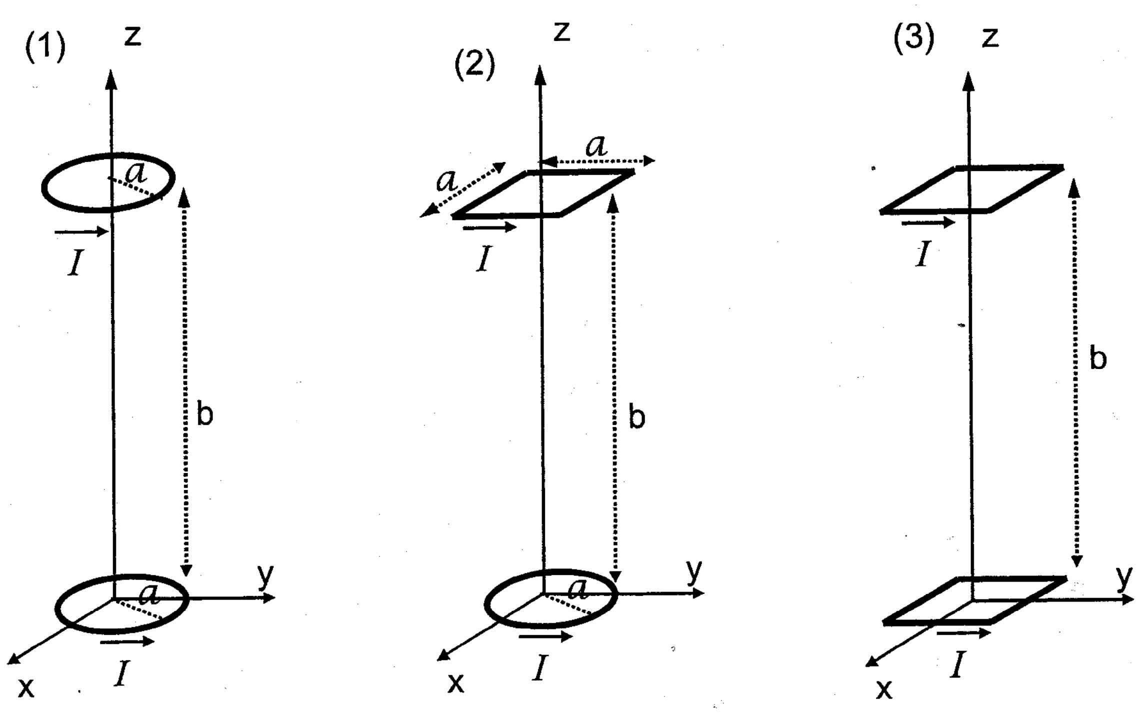
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_1 \frac{1}{r_{12}} d\vec{\ell} + \int_2 \frac{1}{r_{12}} d\vec{\ell} + \int_3 \frac{1}{r_{12}} d\vec{\ell} + \int_4 \frac{1}{r_{12}} d\vec{\ell}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\hat{y}\int_1 \frac{1}{r_{12}} d\ell - \hat{x}\int_2 \frac{1}{r_{12}} d\ell - \hat{y}\int_3 \frac{1}{r_{12}} d\ell + \hat{x}\int_4 \frac{1}{r_{12}} d\ell\right]$$

原点から測った観測点 の位置ベクトルを$\mathbf{R}$、電流素片の位置ベクトルを$\mathbf{r}$とすると$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_{12}$

問5:

下図(1)のように半径aの円環電流ループが距離b隔たって置かれている。間隔bがaよりはるかに大きい場合にループ間にはたらく力を近似的に求めよ。図(2)のように片方の円環電流ループを辺長がaの正方形電流ループに置き換えた場合、および(3)両方とも正方形電流ループに置き換えた場合についてはどうか。



問１　回路に生じる誘導電圧　$V_{emf}=-L\dot{I}$

回路を一周したときの 電圧降下　$\oint E d\ell=-\dfrac{Q}{C}$

両者は等しいので $-L\dot{I}=-\dfrac{Q}{C}$

ここで $I=-\dot{Q}$ なので $L\ddot{Q}=-\dfrac{Q}{C}$,　$\omega=1/\sqrt{LC}$ を導入すると　$\ddot{Q}=-\omega^2 Q$

一般解は $Q=A\cos\omega t+B\sin\omega t$　A,Bは初期条件で決まる定 数

スウィッチを閉じた瞬 間（$t=0$）では $Q=Q_0, I=-\dot{Q}=0$ なので、$A=Q_0$,　$\omega B=0$

よって　$Q=Q_0\cos\omega t$、　$I=\omega Q_0\sin\omega t$

問２　回路に生じる誘導電圧　$V_{emf}=-L\dot{I}$

回路を一周したときの電圧降下　$\oint E d\ell=RI$

両者は等しいので $-L\dot{I}=RI$　時間定数 $\tau_{LR}=\dfrac{L}{R}$ を導入すると　$\dot{I}=-\dfrac{1}{\tau_{LR}}I$

一般解は $I=A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_{LR}}\right)$　Aは初期条件で決まる定数

スウィッチを開き電流を転流した瞬間（$t=0$）においては $I=I_0$ なので、$A=I_0$

よって　$I=I_0\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_{LR}}\right)$

(3)　ループを貫くトロイダルソレノイドの磁束は $\psi=\displaystyle\int_{\text{ソレノイド断面}}\mathbf{B}\cdot\hat{\theta}dS=\dfrac{\mu_0 NIh}{2\pi}\log_e\dfrac{b}{a}=MI$

よって、ループとソレノイド間の相互インダクタンスは　$M=\dfrac{\mu_0 Nh}{2\pi}\log_e\dfrac{b}{a}$

$I=I_0\cos\omega t$　のときループに誘起される起電力は　$V_{emf}=-M\dot{I}=M\omega I_0\sin\omega t$

ループの抵抗Rを流れる電流を$I_{ループ}$と書くと、$M\omega I_0\sin\omega t=RI_{ループ}$

よって　$I_{ループ}=M\omega I_0\sin\omega t/R$

(4)　相互インダクタンスはどちらからみても同一だから、ループ電流$I_{ループ}$により生成される

トロイダルソレノイドを貫く磁束は　$\psi=MI_{ループ}$　$\left(M=\dfrac{\mu_0 Nh}{2\pi}\log_e\dfrac{b}{a}\right)$

自己誘導が無視できる場合は、ソレノイドに誘起される起電力は　$V_{emf}=-M\dot{I}_{ループ}=M\omega I_0\sin\omega t$

よってソレノイドに誘起される電流は　$i=M\omega I_0\sin\omega t/R$

iによってソレノイドに誘起される起電力は　$\underset{(自己誘導)}{V_{emf}}=-L\dot{i}$

これが無視できない場合は　$-M\dot{I}_{ループ}-L\dot{i}=Ri$、すなわち、$M\omega I_0\sin\omega t=L\dot{i}+Ri$

$i=a\cos\omega t+b\sin\omega t$を代入すると　$(M\omega I_0+L\omega a-Rb)\sin\omega t=(L\omega b+Ra)\cos\omega t$

これがすべての時刻で成立するためには両辺の( )の中が共にゼロ。

以上より、$a=-\dfrac{\omega^2 LM}{\omega^2L^2+R^2}I_0$，　$b=\dfrac{\omega MR}{\omega^2L^2+R^2}I_0$

$\dfrac{\omega L}{R}\to 0$　の極限では自己誘導を無視した解に一致する。

問3(1)　系は軸対称なのでアンペールの法則「閉曲線Γに沿ってのBの線積分

$=\mu_0\times${「Γが囲む任意の面S_Γを貫く総電流}」を用いる。

閉曲線として対称軸を中心とする半径rの円をとると、

円周Γに沿ってのBの線積分　$\oint\mathbf{B}\cdot d\vec{\ell}=2\pi rB_\theta$

$\mu_0\times S_\Gamma$を貫く総電流$=\begin{cases}0 & (\Gammaがソレノイドの外)\\ \mu_0 NI & (\Gammaがソレノイドの内)\end{cases}$　よって　$B_\theta=\begin{cases}0 & (\Gammaがソレノイドの外)\\ \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r} & (\Gammaがソレノイドの内)\end{cases}$

(2)

ソレノイドの一断面を貫く磁束は　$\psi=\displaystyle\int_{\text{ソレノイド断面}}\mathbf{B}\cdot\hat{n}d\theta=h\int_a^b B_\theta dr=\dfrac{\mu_0 NIh}{2\pi}\int_a^b\dfrac{1}{r}dr=\dfrac{\mu_0 NIh}{2\pi}\log_e\dfrac{b}{a}$

ソレノイドはN巻きだから、ソレノイドを貫く総磁束は　$\Psi=N\psi=\dfrac{\mu_0 N^2 Ih}{2\pi}\log_e\dfrac{b}{a}=LI$

これよりソレノイドの自己インダクタンスは　$L=\dfrac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\log_e\dfrac{b}{a}$

問４

電流ループの電流素片の位置座標は$(x_2,y_2,0)$

電流素片から観測点Pまでの距離をLと書くと

$L^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+z^2=x^2+y^2+z^2-2xx_2-2yy_2+x_2^2+y_2^2$

$\quad=R^2-2xx_2-2yy_2+x_2^2+y_2^2$

$x,y\approx R$,　$x_2,y_2<<<R$　なので

$L^2\cong R^2\left(1-2\dfrac{x}{R}\dfrac{x_2}{R}-2\dfrac{y}{R}\dfrac{y_2}{R}\right)$　　$L\cong R\left(1-\dfrac{x}{R}\dfrac{x_2}{R}-\dfrac{y}{R}\dfrac{y_2}{R}\right)$　　$\dfrac{1}{L}\cong\dfrac{1}{R}\left(1+\dfrac{x}{R}\dfrac{x_2}{R}+\dfrac{y}{R}\dfrac{y_2}{R}\right)$

これより

$\displaystyle\int_1\dfrac{1}{r_{12}}d\ell\cong\dfrac{1}{R}\left(a+\dfrac{x}{R}\dfrac{a/2}{R}a+\dfrac{y}{R}\dfrac{1}{R}\dfrac{a^2}{4}\right)$　　$\displaystyle\int_3\dfrac{1}{r_{12}}d\ell\cong\dfrac{1}{R}\left(a-\dfrac{x}{R}\dfrac{a/2}{R}a+\dfrac{y}{R}\dfrac{1}{R}\dfrac{a^2}{4}\right)$

$\displaystyle\int_1\dfrac{1}{r_{12}}d\ell-\int_3\dfrac{1}{r_{12}}d\ell\cong\dfrac{a^2}{R^3}x$,　　同様にして　$\displaystyle-\int_2\dfrac{1}{r_{12}}d\ell+\int_4\dfrac{1}{r_{12}}d\ell\cong-\dfrac{a^2}{R^3}y$

以上より

$\mathbf{A}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{a^2}{R^3}(-y\hat{x}+x\hat{y})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R^3}$　　　$\mathbf{m}=Ia^2\hat{z}$;磁気モーメント

問５（１）円環電流が作る軸上の磁場は$B_z = \dfrac{\mu_0 I}{2a} \dfrac{1}{\left\{1+(z/a)^2\right\}^{3/2}}$

問題に適用し、$b >>> a$　であることに注意すると

下のループが上のループの位置につくる軸磁場は　$B_z \cong \dfrac{\mu_0 I}{2a}\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

磁束の保存を用いると、上のループの径方向磁場は半径aの位置で

$2\pi a B_r \cong -\pi a^2 \dfrac{\partial}{\partial b} B_z = 3\dfrac{\pi a^2 B_z}{b}$，　$B_r \cong \dfrac{3a}{2b} B_z$

従って、上のループには下向きに　$F = 2\pi a I B_r \cong \dfrac{3\pi a^2}{b} I B_z$の力が加わる。

作用反作用の法則により引き合う力の大きさは同じで向きは逆

別解　電流ループを磁気双極子とみなすと、磁気モーメントは$m = \pi a^2 I$であり、

$B_z \cong \dfrac{\mu_0 m}{2\pi}\dfrac{1}{b^3}$，　$B_r \cong \dfrac{\mu_0 m}{4\pi}\dfrac{3a}{b^4}$、　$F == 2\pi a I B_r = \dfrac{\mu_0 m}{2\pi}\dfrac{3m}{b^4}$　同じ結果が得られる。

（２）上の矩形ループが下の円環ループの位置（半径a）につくる径方向磁場は

$B_r \cong -\dfrac{\mu_0 m}{4\pi}\dfrac{3a}{b^4}$，　ただし$m = Ia^2$、　$F == 2\pi a I B_r$

（３）　たとえば、下の矩形ループを同じ磁気モーメントをもつ
円環電流ループに置き換えても、上の矩形ループの位置に作る磁場は双極子近似の
範囲で同一。作用反作用の法則を用いるて議論を進めると。引き合う力は上の
矩形ループをも同じ磁気モーメントを持つ円環電流ループに置き換えても同一。
従って、双極子近似の範囲で、問題は（１）の場合に帰着できる。