電磁気演習3

問1　デカルト座標表記で電場が次の式で与えられる真空中を伝わる平面波がある。それぞれの電磁波について対応する磁場を求めよ。

(1)　$\mathbf{E} = \hat{x}E_0 \cos(k_0 z - \omega t)$

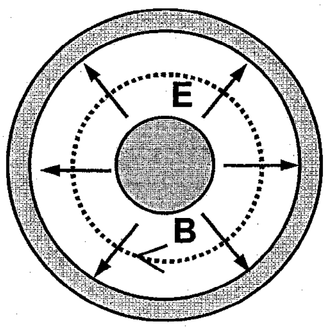
(2)　$\mathbf{E} = \hat{x}E_0 \sin(k_y y + k_z z - \omega t)$

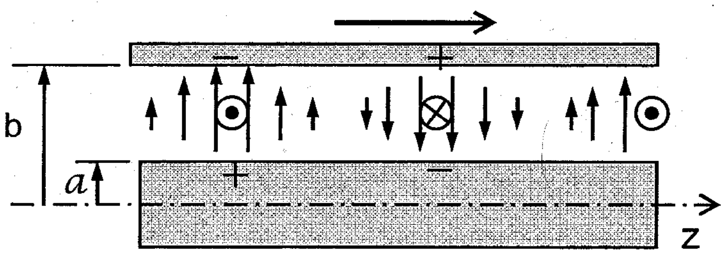
(3)　$\mathbf{E} = \dfrac{k_z \hat{x} - k_x \hat{z}}{k_0} E_0 \cos(k_x x + k_z z - \omega t)$

ここで、$k_0 = \omega / c$ である。

問2　同軸モード

径方向の波動電場　$\mathbf{E} = \hat{r}E_0 \dfrac{a}{r} \exp i(k_0 z - \omega t)$を持つ同軸モードの波動磁場、および中心 導体に誘起される電荷 密度と電流密度をもと めよ。
さらに全断面断面を貫 くポインティング束（ 時間平均したもの）を もとめよ。





問3

z軸方向を向いた$B = 1$テスラの磁場中において、ｘｙ面上でサイクロトロン運動している電子がある。ｚ方向の速度はゼロとする。

①　運動エネルギーWがサイクロトロン輻射により減衰する特性時間τを見積もれ。ヒント：$\dfrac{dW}{dt} = -P$（全放射電力）である。Pを$P = W / \tau$の形に書け，$W = W(0)\exp(-t/\tau)$となる。

②　z 方向に放射される電磁波が円偏波であることを示せ。

問4

滑らかな表面をもつ導体に電磁波を垂直に入射する。 表面の電気伝導度が十分高い場合（銅などの場合）は電磁波はほぼ全反射して導体表面に輻射圧をおよぼす。電磁波の電場の振幅をEとすると輻射圧は$P = \varepsilon_0 E^2$ になる。このことが成立することを入射電磁波の周波数が伝導電子の衝突周波数よりはるかに小さい場合について示せ。

問１　ファラデーの式　$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -rot\mathbf{E}$ を用いる。必要に応じて $rot\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ も併用する。

(1)　$\mathbf{E} = \hat{x}E_0\cos(k_0z-\omega t)$　　$[rot\mathbf{E}]_{y成分} = -k_0E_0\sin(k_0z-\omega t)$、他成分はゼロ。

Bはy成分のみで　$\frac{\partial B_y}{\partial t} = k_0E_0\sin(k_0z-\omega t)$ より $B_y = \frac{k_0}{\omega}E_0\cos(k_0z-\omega t)$

以上より　$\mathbf{B} = \hat{y}\frac{k_0}{\omega}E_0\cos(k_0z-\omega t) = \hat{y}\frac{E_0}{c}\cos(k_0z-\omega t)$

(2)　$\mathbf{E} = \hat{x}E_0\sin(k_yy+k_zz-\omega t)$

$rot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_zE_0\cos(k_yy+k_zz-\omega t) \\ -k_yE_0\cos(k_yy+k_zz-\omega t) \end{pmatrix}$　より $B_x = 0$　$B_y = \frac{k_z}{\omega}E_0\sin(k_yy+k_zz-\omega t)$

$B_z = -\frac{k_y}{\omega}E_0\sin(k_yy+k_zz-\omega t)$　以上より　$\mathbf{B} = \frac{k_z\hat{y}-k_y\hat{z}}{\omega}E_0\sin(k_yy+k_zz-\omega t)$

(3)　$\mathbf{E} = \frac{k_z\hat{x}-k_x\hat{z}}{k_0}E_0\cos(k_xx+k_zz-\omega t)$

$[rot\mathbf{E}]_{y成分} = -\frac{k_zk_z+k_xk_x}{k_0}E_0\sin(k_yy+k_zz-\omega t)$、他成分はゼロ。$B_y = \frac{k_0}{\omega}E_0\cos(k_xx+k_zz-\omega t)$

以上より　$\mathbf{B} = \hat{y}\frac{E_0}{c}\cos(k_xx+k_zz-\omega t)$　ここで、$k_zk_z+k_xk_x = k_0^2$

真空中の電磁波に関する次の法則よりBをもとめることもできる。

① 波動はE×Bの向きに光速で進行する

② EとBは互いに垂直

③ B=E/c

問3

電子はサイクロトロン運動する。

サイクロトロン周波数　$\Omega = \frac{qB}{m}$　を用いると運動エネルギーは

$W = \frac{m}{2}(r_L\Omega)^2$　　$r_L = \frac{\mathrm{v}}{\Omega}$ はラーマー半径

単振動している電子（振幅ℓ、角周波数ω）からの全輻射電力は

$P = \frac{q^2\ell^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^3}$　[W]

であり、サイクロトロン運動は二つの単振動（振幅 r_L、角周波数Ω）の集まりである。

以上より、

$\frac{dW}{dt} = -2P = -\frac{q^2\Omega^2\mathrm{v}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$　$(\mathrm{v} = r_L\Omega)$　である。

$\frac{dW}{dt} = -\frac{q^2\Omega^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\frac{2}{m}W = -\frac{W}{\tau}$,　$\tau = \frac{3\pi m\varepsilon_0c^3}{q^2\Omega^2}$

$B = 1T$ の場合、$\tau \approx 1$ 秒

問2

電場は径(r)方向　　$\mathbf{E} = \hat{r}E_0\frac{a}{r}\exp i(k_0z-\omega t)$

磁場は円周(θ)方向　　$\mathbf{B} = \hat{\theta}\frac{E_0}{c}\frac{a}{r}\exp i(k_0z-\omega t)$

中心導体柱の表面電荷密度　$\sigma = \varepsilon_0E_0\exp i(k_0z-\omega t)$

中心導体柱の表面電流密度　$\mathbf{J} = \hat{z}c\varepsilon_0E_0\exp i(k_0z-\omega t)$

ポインテイングベクトル　$\mathbf{\Gamma} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} = \hat{z}\frac{E_0^2}{\mu_0c}\frac{a^2}{r^2}\cos^2(k_0z-\omega t)$　時間平均　$\langle\Gamma\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0c}\frac{a^2}{r^2}$

全断面を貫く総量は　$\int_a^b\langle\Gamma\rangle 2\pi rdr = \frac{E_0^2}{\mu_0c}\pi a^2\int_a^b\frac{1}{r}dr = \frac{E_0^2}{\mu_0c}\pi a^2\log\frac{b}{a}$　$[W]$

内導体から外導体までの電圧は　$V = \int_a^b Edr = E_0a\log\frac{b}{a}\cos(k_0z-\omega t)$

全電流は　$I = 2\pi aJ = 2\pi ac\varepsilon_0E_0\cos(k_0z-\omega t)$

全電力(時間平均)は全ポインティング束に等しい　$\langle VI\rangle = \pi a^2c\varepsilon_0E_0^2\log\frac{b}{a}$　$[W]$

$\frac{1}{\mu_0c} = c\varepsilon_0$

問4　波動場　$\mathbf{E} = \hat{x}E_0\exp i(kz-\omega t)$

伝導電子の運動方程式

$m\ddot{x} \;=\; qE_0\exp(-i\omega t) \;-\; \nu m\dot{x}$

(慣性項)　(駆動項)　(衝突項)　$\nu(=1/\tau)$：衝突周波数

$x = x_0\exp(-i\omega t)$　を代入　　$-\omega^2x_0 = \frac{qE_0}{m} + i\nu\omega x_0$

$\omega << \nu$　である場合は　$x_0 = -\frac{qE_0}{mi\nu\omega} = i\frac{qE_0}{m\nu\omega}$

電流密度　　$j = qn\dot{x} = -i\omega qnx_0\exp(-i\omega t) = \frac{nq^2}{m\nu}E_0\exp(-i\omega t)$

すなわち、　$\sigma = nq^2/m\nu$

屈折率は、　$N^2 = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} = 1 + i\frac{nq^2}{m\varepsilon_0}\frac{1}{\nu\omega} = 1 + i\frac{\omega_p^2}{\nu\omega} \cong i\frac{\omega_p^2}{\nu\omega}$

ここで、プラズマ周波数　$\omega_p \equiv \sqrt{nq^2/m\varepsilon_0} \approx 1.2\times10^{17}\ \mathrm{sec}^{-1} >> \nu >> \omega$

屈折率の絶対値　$|N| \cong \omega_p/\sqrt{\nu\omega} >> 1$　　波数は　$k = Nk_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}k_0|N|$

また　$\sigma \cong \varepsilon_0\omega|N|^2$

導体中を z 方向へ伝播 する平面波解は電場の 向きを x 軸にとって $\mathbf{E} = E(z,t)\hat{x}$、

$$E(z,t) = E_T \exp i(kz - \omega t) = E_T \exp\left(i\frac{1+i}{\sqrt{2}}k_0|N|z\right)\exp i(-\omega t)$$

磁場は y 軸に平行で、 $\mathbf{B} = B(z,t)\hat{y}$

$$B(z,t) = \frac{k}{\omega}E_T \exp i(kz - \omega t) = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}k_0|N|}{\omega}E_T \exp\left(i\frac{1+i}{\sqrt{2}}k_0|N|z\right)\exp i(-\omega t)$$

電流（密度）は x 軸に 平行で、 $\mathbf{j} = j(z,t)\hat{x}$

$$j(z,t) = \sigma E(z,t) = \varepsilon_0\omega|N|^2 E(z,t)$$

	電場	磁場
入射波	$\hat{x}E_\mathrm{I}\exp i(k_0 z - \omega t)$	$\hat{y}\frac{E_\mathrm{I}}{c}\exp i(k_0 z - \omega t)$
反射波	$\hat{x}E_\mathrm{R}\exp i(-k_0 z - \omega t)$	$-\hat{y}\frac{E_\mathrm{R}}{c}\exp i(-k_0 z - \omega t)$
浸入波	$\hat{x}E_\mathrm{T}\exp i(kz - \omega t)$	$\hat{y}\frac{k}{\omega}E_\mathrm{T}\exp i(kz - \omega t)$

境界条件より $E_T = \frac{2}{1+N}E_I$ $\quad E_R = \frac{1-N}{2}\frac{2}{1+N}E_I = \frac{1-N}{1+N}E_I$

$N = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|N|$, $|N| >> 1$ より $E_T = \frac{2}{1+N}E_I \cong \frac{2\sqrt{2}}{1+i}|N|^{-1}E_I = 2|N|^{-1}E_I\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$

$E_T = 2|N|^{-1}E_I\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$ を用いると浸入波は

$$E(z,t) = 2|N|^{-1}E_I\exp(i\pi/4)\exp\left(i\frac{1+i}{\sqrt{2}}k_0|N|z\right)\exp i(-\omega t)$$

$\pi/4 + \omega t \to \omega t$ となるように時間の原点をずらし、実数部をとると

$$E(z,t) = 2|N|^{-1}E_I\exp\left(-\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}} - \omega t\right)$$

磁場と電流密度についても同様にして

$$B(z,t) = \frac{k_0|N|}{\omega\sqrt{2}}2|N|^{-1}E_I\exp\left(-\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}}\right)\left\{\cos\left(\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}} - \omega t\right) - \sin\left(\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}} - \omega t\right)\right\}$$

$$j(z,t) = \sigma E(z,t) = \varepsilon_0\omega|N|^2 2|N|^{-1}E_I\exp\left(-\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{k_0|N|z}{\sqrt{2}} - \omega t\right)$$

$$\langle j(z,t)B(z,t)\rangle_{時間平均} = \sqrt{2}\varepsilon_0 k_0|N|E_I^2\exp\left(-\sqrt{2}k_0|N|z\right)$$

$$圧力 = \int_0^\infty \langle j(z,t)B(z,t)\rangle_{時間平均}dz = \int_0^\infty \sqrt{2}\varepsilon_0 k_0|N|E_I^2\exp\left(-\sqrt{2}k_0|N|z\right)dz = \varepsilon_0 E_I^2$$