電磁気学３　期末試験　2011年7月26日　8:45〜10：15
（裏面もあるので注意）

[1] 電磁場とN個の荷電粒子が相互作用している系を、特殊相対性理論の範囲で考える。

(1) 系の作用を書け。

(2) 作用の形はどのような原理で決まるか。

(3) 最小作用の原理から粒子の運動方程式を導け。

(4) 最小作用の原理からMaxwell方程式を導け。

[2] Lorentz不変な理論における対称なエネルギー・運動量テンソルを$T^{\mu\nu}(x)$とする。複合粒子等の一般に拡がりをもった物体について以下に答えよ。$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$, $T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu}$は仮定してよい。

(1) 物体のエネルギー・運動量は$T^{\mu\nu}$を用いてどのように定義されるか。それは4元ベクトルであり、物体が孤立しているかぎり保存することを示せ。

(2) $T^{\mu\nu}$を用いて物体の"重心"を定義し、物体が孤立しているかぎりそれは等速直線運動することを示せ。

(3) 物体の重心の速度を$\boldsymbol{v}$とすると、エネルギー・運動量は$E=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$、$\mathbf{p}=m\boldsymbol{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$と書ける、すなわち、点粒子の場合と同じになることを示せ。（点粒子の場合ではなく、粒子と場からなる、拡がりをもった一般の物体に対して問うていることに注意。）

[3] 3次元の直交座標 (x, y, z) を考える。z 軸上の2点 $A(0, 0, -r/2)$, $B(0, 0, r/2)$ にそれぞれ電荷 $-q$, q を固定する。xy 座標面、すなわち、平面 $z = 0$ を S とする。

(1) S 上での電磁場の応力テンソル $T^{ij}, (i, j = x, y, z)$ を求めよ。(x, y の関数としてあらわせ。)

(2) 応力テンソルの適当な成分を S にそって積分することにより、電磁場が面 S を通して押し合う力を求めよ。

(3) 上の結果は2つの電荷の間のCoulomb力と密接に関係している。どう関係しているか、理由とともに述べよ。

電磁気学３　期末試験　解答

[1]

(1) $S = \sum_{a=1}^{N}\left\{-m_a c\int ds_a - q_a\int dx_a^\mu A_\mu(x_a)\right\} + \frac{1}{c}\int d^4x\frac{-\epsilon_0 c^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$

x_a^μ は粒子 $(a = 1\ldots N)$ の座標，$ds_a = \sqrt{\eta_{\mu\nu}dx_a^\mu dx_a^\nu}$，$m_a, q_a$ は質量と電荷，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

(2) 微分の2次であること、Lorentz不変性、ゲージ不変性から決まる。

(3) 粒子が1個の場合を考えれば十分。勝手なパラメーター τ を使って、S のうちの粒子の座標に依存する部分は

$-\int d\tau\left\{mc\sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} + qA_\mu(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\right\}$ と書ける。粒子の座標を変化させたときの S の変分は、部分積分ののち、

$$\delta S = \int d\tau\left\{mc\frac{d}{d\tau}\frac{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}}{\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}}} - q\left(\partial_\mu A_\nu(x(\tau)) - \partial_\nu A_\mu(x(\tau))\right)\frac{dx^\nu}{d\tau}\right\}\delta x^\mu$$

となる。これがゼロより、$mc\frac{du^\mu}{ds} = qF^{\mu\nu}u_\nu$. ここで、$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$.

(4) $j^\mu(x) = c\sum_{a=1}^{N}\int dx_a^\mu q_a\delta^4(x - x_a)$ より、S のうち、A_μ を含む部分は、

$-\frac{1}{c}\int d^4x\left(j^\mu A_\mu + \frac{\epsilon_0 c^2}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$. A_μ を変化させたときの S の変分は、部分積分ののち $\delta S = \frac{1}{c}\int d^4x\left(-j^\nu\delta A_\nu + \epsilon_0 c^2\partial_\mu F^{\mu\nu}\right)\delta A_\nu$ となる。これがゼロより、$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c^2}$ を得る。

[2]

(1) 孤立した物体を囲む3次元領域を V とし、$P^\mu = \int_V d^3x T^{0\mu}$ とする。物体が孤立しているということは、V のすぐ外側では $T^{\nu\mu} = 0$ ということである。よって、$\partial_0 T^{0\mu} + \partial_i T^{i\mu} = 0$ と3次元での Gauss の定理から $\partial_0 P^\mu = -\int_V d^3x\partial_i T^{0\mu} = 0$ となり、P^μ が保存すること

がわかる。これが、4元ベクトルであることは、空間的超局面Σをもちいて、$P^\mu = \int_\Sigma dS_\nu T^{\nu\mu}$とも書けることからわかる。

(2) $S^{\lambda\mu\nu} = T^{\lambda\mu}x^\nu - T^{\lambda\nu}x^\mu$は$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} = 0$をみたすから、$M^{\mu\nu} = \int_V d^3x S^{0\mu\nu}$は保存する。特に、$\mu = 0, \nu = i$成分に注目すると、$\mathbf{B} = \int_V d^3x T^{00}\mathbf{x} - c^2\mathbf{P}t$が保存する。ここで、$\mathbf{P}$は全運動量である。移項して、全エネルギー$E = \int_V d^3x T^{00}$で割り、重心座標を$\mathbf{x}_{CM} = \int_V d^3x T^{00}\mathbf{x}/E$で定義すると、$\mathbf{x}_{CM} = \mathbf{B}/E + (c^2\mathbf{P}/E)t$となる。これは、重心が速度$c^2\mathbf{P}/E$の等速直線運動をしていることを示す。

(3) 静止系（$\mathbf{P} = 0$となる系）における物体のエネルギーをmc^2とすると、4元運動量は$(mc, \mathbf{0})$である。これを、静止系に対して速度$-\boldsymbol{v}$で動いている系からみると、Lorentz変換より、エネルギー・運動量は$E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$、$\mathbf{P} = m\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$となる。これを(2)の結果とくらべると、$\boldsymbol{v}$が重心の速度に他ならないことがわかる。

[3]

(1) S上で、電場は$-z$の向きで、大きさは$E = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{(x^2 + y^2 + r^2/4)^{3/2}}$.

よって応力テンソルは、$T^{zz} = -\dfrac{\epsilon_0}{2}E^2 = -\dfrac{q^2}{2(4\pi)^2\epsilon_0}\dfrac{r^2}{(x^2 + y^2 + r^2/4)^3}$,

$T^{xx} = T^{yy} = \dfrac{\epsilon_0}{2}E^2 = \dfrac{q^2}{2(4\pi)^2\epsilon_0}\dfrac{r^2}{(x^2 + y^2 + r^2/4)^3}$, 他の成分はゼロ。

(2) $T^{zx} = 0, T^{zy} = 0$だから、電磁場が面Sを通じて押し合う力はz成分のみであり、その合力は、T^{zz}をSにそって積分するとえられる。
$\displaystyle\int dxdy \frac{r^2}{(x^2 + y^2 + r^2/4)^3} = \frac{8\pi}{r^2}$より、$\displaystyle\int dxdy T^{zz}(x, y, 0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$.

(3) 系の上半分に働く外力は、Bにある電荷を支えるために外部から加えている力と、Sを通じて電磁場の$z < 0$の部分が$z > 0$の部分におよぼす力F_Sである。系のどの部分もつりあっているから、この合力はゼロのはずである。前者は、Coulomb力に抗して電荷を固定しておくために必要な力で、$+z$の向きで大きさは$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$である。よって、$F_S$は$-z$の向きで大きさは$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$に等しい。