$\nabla \times (\nabla \times \mathbb{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mu_0 \mathbb{H}$

$= -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \frac{\partial \varepsilon \mathbb{E}}{\partial t}$

平成 23 年度　電磁気学 4　試験

平成 24 年 1 月 24 日

1. アイコナール方程式

（1）　自由な電流、自由な電荷がない場合の Maxwell 方程式を　、$\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ をもちいて書き下せ。

$\nabla \times \frac{\mathbb{E}}{c} + \frac{\partial}{c\partial t}\mathbb{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbb{B} - \frac{\partial}{c\partial t}\frac{\mathbb{E}}{c}$

$\mathbb{E} = e^{i(kx - \ldots}$

（2）　（1）の場合、一様で一定な誘電率 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ を持つ誘電体を考える。磁化はないものとする。Maxwell 方程式からこの誘電体中での波動方程式を導き、電磁波の分散関係を導け。

$\mathbb{D} = \varepsilon \mathbb{E}$

（3）　誘電率が電磁場の空間変化に比べてゆっくりと空間的に変化している場合に波動方程式はどうなるか、示せ。

（4）　簡単のために場をスカラーであらわし、場の振幅 $a(\mathbf{r})$ とアイコナール $\varphi(\mathbf{r})$ にわけて考える。

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) e^{i\{\varphi(\mathbf{r}) - \omega t\}}$$

ただし、$a(\mathbf{r})$ も $\varphi(\mathbf{r})$ も実数とする。（3）の場合の波動方程式から、アイコナール $\varphi(\mathbf{r})$ が満たすべき方程式を導け。

2. 電磁波の透過

下図のように、屈折率 n_1 の媒質①から厚さ d、屈折率 n_2 の媒質②に波数 $\mathbf{k}_1$，角度 θ_1 で p 偏光の電磁波が入射し、屈折率 n_1 の媒質③に透過する問題を考える。

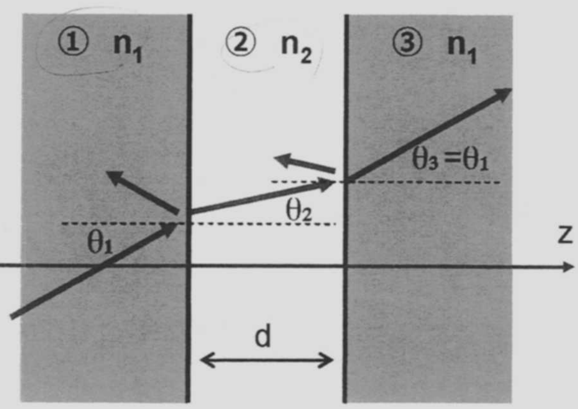
（1）　Snell の法則　$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ が成り立つことを示せ。

（2）　①での入射波を $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$　、③での透過波を $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_t^0 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$　とおく。このとき、すべての多重反射を考慮した①から③への透過係数 $t_{121}^{\mathbf{p}}$ とエネルギー透過率 T を求めよ。

（3）　$n_1 = 1,\ n_2 = n\ \ (n > 1)$ のとき、d を大きくしていくとエネルギー透過率 T はどのように振る舞うか？

（4）　$n_1 = n,\ n_2 = 1\ \ (n > 1)$ のとき、$\dfrac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \geq 1$ となる θ_1 が存在する。このとき、②ではどんな電磁波が存在するか？

（5）　（4）において d を大きくしていくとエネルギー透過率 T はどのように振る舞うか？



$|\mathbb{E}_i^0| \cos\theta_i - |\mathbb{E}_r^0| \cos\theta_r = |\mathbb{E}_2^0| \cos\theta_2$

$|k_i| |\mathbb{E}_i^0| + |k_i'| |\mathbb{E}_i^0| = |k_2| |\mathbb{E}_2^0|$

３．双極子放射

振動する局所的な電流による電磁放射を考える。電流源は$x=0$の近傍に局在し、下記のように調和関数的な時間変化をすると考える。電流源以外は真空とする。

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)=\mathbf{J}_0(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

（１）このとき、ベクトルポテンシャル$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$は遅延時間t'をもちいて下記のように書くことができることを示せ。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}',t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x'$$

$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A = -\mu_0 J$

$$t'=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}$$

（２）十分遠方では、$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|=r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'$（$r=|\mathbf{x}|$, $\mathbf{n}=\mathbf{x}/r$）と近似できるので、

$t'=t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}{c}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}\mathbf{J}(\mathbf{x}',t)d^3x'$$

$\frac{1}{r}$

と書けることを示せ。ここで$k=\omega/c$である。

（３）電流源が十分小さければ（２）に示した積分の中の指数関数をテーラー展開することができる。テーラー展開の第一項をとることにより、ベクトルポテンシャルが下記のように書けることを示せ（双極子近似）。

$= -i\omega P(t)$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=-\frac{i\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\mathbf{P}(t)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$= -i\omega\int x'\,\frac{1}{i\omega}\nabla\cdot J(x',t)\,d^3x$

式中の分極$\mathbf{P}$は電流$\mathbf{J}$と連続の式で結ばれる電荷密度ρをもちいて下記のように与えられる。

$$\mathbf{P}(t)=\int\mathbf{x}'\rho(\mathbf{x}',t)d^3x'$$

$\int$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{x},t)+\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t}=0$$

$\nabla\cdot J(x,t) - i\omega\rho(x,t) = 0$

$$\rho(\mathbf{x},t)=\rho_0(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

（ヒント）（２）の積分の中を部分積分せよ。

（４）（３）で得られたベクトルポテンシャルから、十分遠方での電場と磁場を決定せよ。

このようにして、双極子近似では振動する局在した電流は振動分極として振る舞い、球面波の形で遠方に場を作ることがわかる。