H22年度「波動と量子論」試験問題（全部で４問。裏にも問題あり）

（1） 不確定性関係

自己共役演算子$\hat{A}$と$\hat{B}$が 交換関係 $[\hat{A},\hat{B}]=ik$ を満たしているとき、任意の状態ベクトル$|\psi\rangle$について、不等式 $\delta A \times \delta B \geq |k|/2$ が成立する。ただし、$\delta A = \sqrt{\langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle}$,

$(a' - a''^{*})\langle a'|a''\rangle$　　$(A - \bar{A})$

$\delta B = \sqrt{\langle\psi|(\Delta\hat{B})^2|\psi\rangle}$, $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$, $\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$である。

1-1)　kは実数であることを示せ。　$A|$　$\langle\psi|(a - a^{*})|\psi\rangle$　$A|a\rangle = a|a\rangle$　$|a\rangle = \sum_{a'} C_{a'}|a'\rangle$

$\langle a'|a\rangle = C_{a'}$

1-2)　$\hat{A}$のスペクトル分解の式$\hat{A} = \sum a\,|a\rangle\langle a|$を用いて、期待値$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$を変形して、これ$\langle a'|\psi\rangle$が測定の平均値を表すことを説明せよ。同様に、$\delta A^2$を変形して、これが測定の揺らぎを表すことを説明せよ。（必要に応じて、射影演算子$\hat{P}(a) = |a\rangle\langle a|$の性質$\hat{P}(a)^2 = \hat{P}(a)$, $\sum \hat{P}(a) = \hat{1}$, 等を用いてよい）

$\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$

1-3)　この不等式 $\delta A \times \delta B \geq |k|/2$が成り立つことを実験で示そうとしたときに、どのような手順で実験を行うことになるのか、「状態の準備」、「測定」について特に注意して、できる限り正確に記述せよ。

（2） ハイゼンベルクの運動方程式

閉じた量子系の状態ベクトル$|\psi(t)\rangle$の時間発展は、シュレディンガー方程式$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$で記述される。ここで、$\hat{H}$はハミルトニアン演算子で、時間にはあらわに依存しないとする。

$\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)$　　$\hat{U}(t+dt, t)U(t, t_0) = U(t+dt, t_0)$

2-1)　ユニタリー演算子$\hat{U}(t)$を用いて、$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$と書いたときの$\hat{U}(t)$の時間発展に関する方程式を導き、さらに、$\hat{H}$を用いて$\hat{U}(t)$を具体的に表わした式を求めよ。

2-2)　シュレディンガー描像での演算子$\hat{A}$について、ハイゼンベルク描像での演算子$\hat{A}_H$を、$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^{+}(t)\hat{A}\hat{U}(t)$と定義する。このとき、$\hat{A}_H(t)$の時間発展に関する方程式（ハイゼンベルクの運動方程式）を導け。　$\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t)$

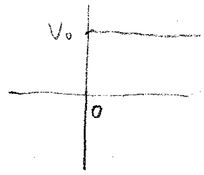
2-3)　スピン1/2の系の時間発展を考える。x方向に磁場が加わっている場合のハミルトニアン$\hat{H}$は$\hat{H} = -\hbar\omega \times \hat{\sigma}_x/2$と表される。このときのパウリのスピン演算子$\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$に関するハイゼンベルクの運動方程式を書き下し、その才差運動の角周波数を求めよ。ただし、$[\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y]=2i\hat{\sigma}_z$, $[\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z]=2i\hat{\sigma}_x$, $[\hat{\sigma}_z,\hat{\sigma}_x]=2i\hat{\sigma}_y$を満たす。

$[x, f(p)] = i\hbar\frac{\partial f(p)}{\partial p_x}$

（3）段差ポテンシャル

1次元空間において、次のような段差ポテンシャル V(x)中を運動する質量 m の粒子を考える。

$$V(x)=\begin{cases}0\ (x<0)\\ V_0(0\leq x)\end{cases}$$



ただし、$V_0>0$ である。

ここで、x の負の方向から正の方向へ粒子が入射してきていて、そのエネルギーE が、$E>V_0$を満たす場合を考える。

3-1)　一般に、x-表示したときの波動関数$\langle x|\psi(t)\rangle=\psi(x,t)$を用いて、確率密度は$\rho(x,t)=|\psi(x,t)|^2$と表され、確率の流れは、$j(x,t)=\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)-\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right)\psi(x,t)\right]$と表される。このとき、連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}j(x,t)=0$$

が成立することを示せ。

3-2)　x<0　および x>0 の領域での位相速度$v_p=\omega/k$を E およびV_0を用いて表せ。ただし、ωおよび k は、$E=\hbar\omega=\frac{(\hbar k)^2}{2m}+V(x)$ を満たす。　$i\hbar\frac{d}{dt}\psi=H\psi$

$\frac{E\psi}{i\hbar}$

3-3)　透過率 $T=|j_t|/|j_{in}|$および反射率 $R=|j_r|/|j_{in}|$を求めよ。ここで、j_{in}, j_t, j_r はそれぞれ、入射、透過、反射に関する確率の流れを表す。

（4）ベルの不等式

ベルの不等式の意義について説明せよ。

$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{E}{i\hbar}\psi=\left(\frac{\hbar k^2}{2mi}+\frac{V}{i\hbar}\right)\psi$

$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar k^2}{2mi}\psi$

$\frac{(\hbar k)}{2m}=\frac{E}{\hbar k}$

$\log\psi=\frac{\hbar k^2 t}{2mi}\log e+\log A$

$\frac{\omega}{k}=\frac{\hbar k^2}{2m}$

$\log\psi=\alpha e^{\cdot}A$

$\psi=Ae^{\alpha}$