

## 2007年度 解析力学1 試験問題

(2007年7月25日)

注意: 各答案用紙には、入学年、学生証番号、氏名、(理学部以外の場合は学部名)を記入すること。また、答案用紙は重ねて2つに折り提出すること。

## I. (基本問題)

力学変数が  $q(t)$  の1自由度系を考える。この系の Lagrangian を  $L(q, \dot{q}, t)$  とする。以下の設問に答えよ。

- (1) 最小作用の原理から Euler-Lagrange 方程式を導け。
- (2) Noether の定理は

Lagrangian  $L(q, \dot{q}, t)$  が対称性を持っている、即ち、 $L$  が力学変数  $q(t)$  のある微小変換に対して(時間についての全微分項を除き)不変であると、それに対応した保存量(時間に依らず一定である量)が存在する。

という内容であった。今、 $\delta q(t) = F(q(t), \dot{q}(t)) \epsilon$  なる微小変換 ( $\epsilon$  は微小定数パラメータ) に対する Lagrangian の変化分が  $\delta L = \frac{d}{dt} Y(q(t), \dot{q}(t), t) \epsilon$  という時間についての全微分の形になったとする。この対称性に対応した保存量を導け。

- (3) Lagrangian が

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

で与えられるとする ( $m$  と  $k$  は正の定数)。Euler-Lagrange 方程式を解いて  $q(t)$  を求めよ。但し、時刻  $t=0$  における初期条件を  $q(0) = q_0$  および  $\dot{q}(0) = v_0$  とする。

- (4) 上の問(3)の系の保存量を一つ与えよ。この保存量に対応した問(2)の  $F(q, \dot{q})$  と  $Y(q, \dot{q}, t)$  を与え、保存量を  $q$  と  $\dot{q}$  で表せ。また、(3)で求めた Euler-Lagrange 方程式の解に対するこの保存量を求めよ。

## II. (ガリレイ不変性)

ガリレイ不変性を持った  $N$  個の質点系の Lagrangian の例を一つ与え、その Lagrangian が有限なガリレイ変換でどのように変換するかを示せ。更に、ガリレイ不変性から導かれる保存量を導き、その意味を述べよ。なお、ガリレイ変換は、質点の座標  $x(t)$  に対する  $x(t) \rightarrow x(t) - Vt$  なる変換である ( $V$  は定数ベクトル)。

裏面に第3問がある