III. (中心力問題)

講義では、中心力ポテンシャル $U(r)$ の下での質点 (質量 m) の (x, y) 平面上の運動を極座標 $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ を用いて考察した。要点をまとめると以下の通りであった:

> 角運動量の z 成分 (保存量) を M で表すと
>
> $$M = mr^2\dot{\varphi}$$
>
> であり、r の運動方程式は
>
> $$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}U_{\text{eff}}(r) \tag{A}$$
>
> で与えられる。ここに有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ は次式で定義される:
>
> $$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

今、$U(r) = \alpha r^n$ の場合を考える。ここに、α と n は定数である。以下の設問に答えよ。

(1) 中心力ポテンシャル $U(r)$ が引力であるためには、定数 α と n はどのような条件を満さねばならないか?

以下の設問では (1) の条件が満されている場合を考える。

(2) $n = 2$、$n = -1$ および $n = -4$ の場合の $U_{\text{eff}}(r)$ を図示せよ。

(3) 原点 $(r = 0)$ に落ち込まない有界な軌道が存在するためには n はどのような範囲になければならないか? 理由を付して答えよ。

以下では n は問 (3) で与えた範囲にあるとする。

(4) $r(t) = r_C =$ 一定 の円軌道の半径 r_C を求めよ。なお、この円軌道の角運動量を M とする。更に、質点がこの円軌道を一周するのに要する時間 (周期) T_C を r_C、M、m を用いて表せ。

(5) 前問 (4) の円軌道から微小にずれた軌道を考えよう。$w(t)$ を微小として $r(t)$ を

$$r(t) = r_C + w(t) \tag{B}$$

と表す。$r(t)$ の運動方程式 (A) に (B) を代入し、微小な w について Taylor 展開を行って一次の項のみを残した $w(t)$ の (線形化した) 運動方程式を書き下せ。なお、運動方程式の係数は r_C、M、m を用いて表せ。

(6) 前問 (5) で得た $w(t)$ の (線形化) 運動方程式の解は振動を表す。この振動の周期 T_w と (4) で求めた円軌道の周期 T_C との関係を導け。

(7) 上で考えた、円軌道に微小な振動が加わった軌道は、定数 n がどのような条件を満す場合に閉じるか? また、この条件を満す n の例を三つ与えよ。