III. (Lagrange の未定乗数法)

力学変数が $x(t)$ と $y(t)$ の系を考える。この系の Lagrangian は $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ で与えられるが、$x(t)$ と $y(t)$ にはある関数 $C(x, y)$ を用いた

$$C\big(x(t), y(t)\big) = 0 \qquad \text{(A)}$$

$x^2 = l - (l-y)^2$

$l^2 - l^2 + 2ly - y^2$

なる拘束条件が課せられている。以下の設問に答えよ。

(1) 拘束条件 (A) の下で作用 $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ を極小にする配位は、新たな時間の未知関数 (Lagrange の未定乗数) $\lambda(t)$ を導入した次の運動方程式、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial C}{\partial x}\,, \qquad \text{(B)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} + \lambda \frac{\partial C}{\partial y}\,, \qquad \text{(C)}$$

$x\dot{x} - l\dot{y} + y\dot{y} = 0$

$\dot{x}\dot{x} + x\ddot{x} - l\ddot{y} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}$

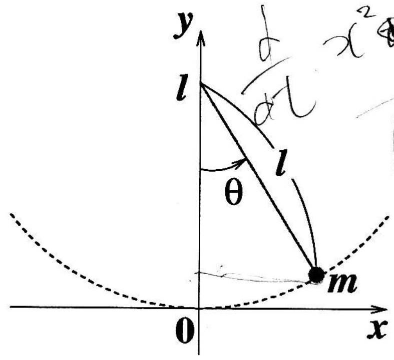
および拘束条件 (A) を解くことにより得られる。このことを示せ。

$2 \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$\frac{d}{dl} \quad x^2 + 2ly + y^2 = 0$

$2x - 2l + 2y = 0$

この応用として、鉛直平面内を運動する単振り子 (ひもの長さ ℓ、おもりの質量 m) を考える。図のように、この鉛直平面上の (x, y) 座標を、原点がおもりの最下点、鉛直上向きに y 軸、水平方向に x 軸、となるように取る。[なお、以下の問の解答においては、図の角度 θ を用いてはならない。]



$2x\dot{x} - 2l\dot{y} + 2y\dot{y} = 0$

$\dot{x} = \frac{l-y}{x}\dot{y}$

(2) おもり (質点) の座標 $(x(t), y(t))$ の Lagrangian $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ および拘束条件の関数 $C(x, y)$ を与えよ。なお、重力加速度を g とする。

$\sqrt{x^2}$

(3) (B) 式の $\lambda \dfrac{\partial C}{\partial x}$ 項、および、(C) 式の $\lambda \dfrac{\partial C}{\partial y}$ 項は、拘束 (A) から来る余分の力 (今の場合は、ひもの張力) の x 成分および y 成分と見なすことが出来る。今、原点に静止していたおもりに初速度 $(\dot{x}, \dot{y}) = (v_0, 0)$ を与えたとする ($v_0 > 0$)。その後の時刻における、ひもの張力の大きさを、おもりの y 座標を用いて表せ。(ひもはたるまないとせよ。) ただし、前問 **(2)** で求めた $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ 及び $C(x, y)$ に対して (A)、(B)、(C) 式を考えることにより求めよ。[**ヒント:** (B) $\times \dot{x}$ + (C) $\times \dot{y}$ や (B) $\times x$ + (C) $\times (y - \ell)$ 等を考えることにより、λ を y で表せ。]

$\dot{x}$

$\dot{x} =$

$m\ddot{x} \cdot \dot{x} = 2\lambda x\dot{x}$

(4) 与えられた初速 v_0 に対して、その後の振り子の運動において、ひもがたるむことがあるかを考察せよ。もしもあるならば、たるみ始める時のおもりの y 座標を与えよ。[**ヒント:** 前問 **(3)** の結果、および、エネルギー保存則等を用いよ。]

$\frac{\lambda\{(l-y)\dot{y} + \dot{y}(y-l)\}}{l}$

$l^2 - 2ly + y^2 + 2yl - y^2$