# 2010年度 解析力学1 試験問題

(2010年7月28日)

注意: 各答案用紙には、学生番号、氏名、(理学部以外の場合は学部名) を記入すること。また、答案用紙は重ねて2つに折り提出すること。

**I.** (基本問題)

力学変数が $q(t) = \big(q_1(t), q_2(t), \cdots, q_N(t)\big)$ の $N$ 自由度系を考える。この系の Lagrangian を $L(q, \dot{q}, t)$ とする。以下の設問に答えよ。なお、力学変数 $q_i(t)$ を識別する index $i$ について和をとる際は、index を省略せずに明記すること。但し、和記号 $\sum_{i=1}^{N}$ は略してよい (Einstein の縮約ルール)。

(1) 最小作用の原理から Euler-Lagrange 方程式を導け。

(2) Noether の定理は

> Lagrangian $L(q, \dot{q}, t)$ が対称性を持っている、即ち、$L$ が力学変数 $q(t)$ のある微小変換に対して (時間についての全微分項を除き) 不変であると、それに対応した保存量 (時間に依らず一定である量) が存在する。

という内容であった。今、$\delta q_i(t) = F_i\big(q(t), \dot{q}(t)\big)\,\epsilon$ なる微小変換 ($\epsilon$ は微小定数パラメータ) に対する Lagrangian の変化分が $\delta L = \dfrac{d}{dt} Y\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\,\epsilon$ という時間についての全微分の形になったとする。この対称性に対応した保存量を導け。(保存量の表式を与えるだけではなく、それが保存することを示すこと。)

**II.** (Lagrangian の不変性と保存量)

一様な重力が働く3次元空間を運動する1質点系を考える。この質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ として、Lagrangian は次式で与えられる:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{x}}^2 - mgz$$

ここに、$\dot{\boldsymbol{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ である。この Lagrangian はいくつかの対称性を持っている。以下の設問に答えよ。

(1) $L$ は $x$ および $y$ 方向の並進に対して不変である。それぞれの並進対称性に付随した保存量を与えよ。

(2) $z$ 方向の並進の下で $L$ は不変ではないが、$L$ の変化分は時間についての全微分項となることを示せ。更に、このことから Noether の定理を用いて導かれる保存量を与えよ。

この問題は裏面に続く

(3) $L$ は $z$ 軸まわりの回転 ($z$ 軸を回転軸とする回転) に対して不変である。

(3-1) $z$ 軸まわりの微小な回転 (微小回転角を $\delta\varphi$ とする) の下での $x, y, z$ の変化分を与えよ。なお、$z$ 軸まわりの回転の方向はどちらとしてもよい。

(3-2) $z$ 軸まわりの回転不変性に対応した保存量を与えよ。

(4) 以上で考えた保存量以外の、この系が持つ保存量 (一つ) を与えよ。

## III. (Lagrange の未定乗数法)

力学変数が $x(t)$ と $\theta(t)$ の系を考える。この系の Lagrangian は $L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ で与えられるが、$x(t)$ と $\theta(t)$ にはある関数 $C(x, \theta)$ を用いた

$$C\big(x(t), \theta(t)\big) = 0 \tag{A}$$

なる拘束条件が課せられている。以下の設問に答えよ。

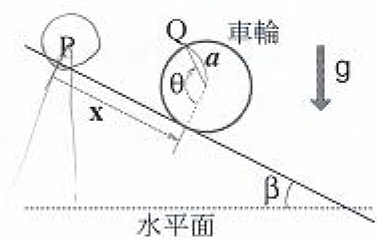
(1) 拘束条件 (A) の下で作用 $S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ を極小にする配位は、新たな時間の未知関数 (Lagrange の未定乗数) $\lambda(t)$ を導入した次の運動方程式、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + \lambda \frac{\partial C}{\partial x}\,, \tag{B}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial C}{\partial \theta}\,, \tag{C}$$

および拘束条件 (A) を解くことにより得られる。このことを示せ。

この応用として、図のように傾き角 $\beta$ の斜面を、半径 $a$ で質量 $m$ の車輪 (太さなし) が、**すべることなく**転がり落ちる過程を、図の距離 $x(t)$ と角度 $\theta(t)$ を用いて考える。ここに、$x$ は斜面上の固定点 $P$ から車輪と斜面の接点までの距離、$\theta$ は車輪上の固定点 $Q$ と車輪と斜面の接点の間の角度である。時刻 $t = 0$ における初期条件を、$x(0) = \dot{x}(0) = \theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ とする。すなわち、$t = 0$ において、車輪は静止しており、点 P と点 Q は一致している。




(2) $\big(x(t), \theta(t)\big)$ を用いたこの系の Lagrangian $L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$、および、拘束条件の関数 $C(x, \theta)$ を与えよ。なお、重力加速度を $g$ とする。

(3) 拘束条件 (A) および Lagrange の未定乗数法を用いた運動方程式(B) と (C) を解き、$x(t)$ と $\theta(t)$ を求めよ。更に、斜面から車輪に働く摩擦力を、未定乗数 $\lambda(t)$ と関連させて求めよ。