確率論基礎 試験問題

（実施日：2011年7月27日(水)　担当：重川 一郎）

注意　解答用紙の全てに入学年・学部・学科・学年・学生番号・氏名を書くこと．

$\boxed{1}$ X, Y を平均 0, 分散 1 の正規分布に従う独立な確率変数とする．確率変数 X^2+Y^2 の分布関数を計算せよ． [25点]

$\boxed{2}$ パラメーター $\alpha, \beta > 0$ のガンマ分布の標準偏差を求めよ．但し，この分布は $[0,\infty)$ 上に次の密度関数 $f(x)$ を持つ．

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}.$$

[25点]

$\boxed{3}$ 粒子が正方形 $ABCD$ の頂点を，それぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で隣の点に移動しているとする．A から出発して何回目に初めて C へ到達するか，その期待値を求めよ． [25点]

$\boxed{4}$ 放射性元素の半減期について考えよう．n 個の原子があって時間 t とともに崩壊して減少していく状態を

$$N_n(0) = n, \quad \frac{dN_n(t)}{dt} = -\alpha N_n(t)$$

という方程式で表す．$N_n(t)$ が時間 t の後の原子の個数で，α は単位時間の崩壊率である．これを解いて $N_n(t) = \frac{n}{2}$ をみたす t を半減期という．しかし $N_n(t)$ が個数を表し整数であるから，上の微分方程式は意味をなさない．この問題を次のように定式化しなおして考えてみよう．原子に番号を付けて j 番目の粒子が時間 t の後に生存しているかどうかに応じて

$$X_j(t) = 1 \text{ または } 0$$

とする．但し $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ は独立で $P[X_j(t) = 1] = e^{-\alpha t}$ で与えられる．時間 t の後に生存している総原子数 $N_n(t)$ は

$$N_n(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(t)$$

で与えられる．このとき次に答えよ．

(1) $E[N_n(t)] = \dfrac{n}{2}$ となる t を求めよ．

(2) 極限 $N(t) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{N_n(t)}{n}$ が存在することを示し，$N(t) = \frac{1}{2}$ となる t を求めよ．

[25点]

大数　$P(\quad < \varepsilon)$