幾何学入門 小テスト 問題

1. 4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を次で定める．

$$M = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + 3zw^2 = y^2 + z^3 + 1,\ w^3 + 2xy = 3z^2 w\right\}$$

   (a) M が多様体であることを示せ．
   (b) $V = \{(s, t, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ としたとき，$T_pM = V$ となる $p \in M$ をすべて求めよ．
   (c) M 上の C^∞ 関数 $f(x, y, z, w) = w$ の臨界点をすべて求めよ．

2. $n \geq 1$ に対して，S^n で n 次元球面

$$S^n = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots x_n^2 = 1\}$$

を表わすものとする．C^∞ 級写像 $f : S^2 \to S^1$ を

$$f(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{2}, \frac{\sqrt{y^2+z^2+1}}{2}\right)$$

で定める．

   (a) $(1, 0, 0)$ は f の臨界点であることを示せ．
   (b) f の臨界点をすべて求めよ．
   (c) $g : S^1 \to \mathbb{R}^2$ を包含写像 $(g(x, y) = (x, y))$ とする．$g \circ f$ の臨界点をすべて求めよ．

3. n を自然数，M_1, M_2, M_3 を n 次元多様体とし，$f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ を C^∞ 級写像とする．f, g, $g \circ f$ のそれぞれの臨界点のなす集合を $C(f)$, $C(g)$, $C(g \circ f)$ とすると，

$$C(g \circ f) = C(f) \cup f^{-1}(C(g))$$

が成り立つことを示せ．

4. U,V を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$F : U \to V$ を微分同相写像とする．多様体 $M \subset \mathbf{R}^n$ が $M \subset U$ をみたすとき，$F(M)$ も多様体であることを示せ．

解答例

1.
(a) $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を

$$F(x,y,z,w)=(x^2-y^2-z^3+3zw^2-1,2xy+w^3-3z^2w)$$

で定めると，$M=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid f(x,y,z,w)=(0,0)\}$.

$$A(x,y)=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix},\qquad B(z,w)=\begin{pmatrix}3(w^2-z^2) & 6zw\\ -6zw & 3(w^2-z^2)\end{pmatrix}$$

と置くと，$DF_{(x,y,z,w)}=(A(x,y)\ B(z,w))$ であり，$\det A(x,y)=4(x^2+y^2)$, $\det B(z,w)=9(w^2-z^2)^2+36(zw)^2$ より，$(x,y,z,w)\neq(0,0,0,0)$ ならば，$\operatorname{rank}A(x,y)=2$, または，$\operatorname{rank}B(z,w)=2$. すなわち，$(x,y,z,w)\neq(0,0,0,0)$ ならば $\operatorname{rank}DF_{(x,y,z,w)}=2$. $(0,0,0,0)\notin M$ より，M は多様体.

(b) $p=(x,y,z,w)$ に対して，

$$T_pM=\operatorname{Ker}DF_p=\left\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ A(x,y)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=-B(z,w)\begin{pmatrix}v_3\\ v_4\end{pmatrix}\right\}$$

$(x,y)\neq(0,0)$ であるときは，$A(x,y)$ は正則行列なので，

$$T_pM=\left\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4\ \middle|\ \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=-A(x,y)^{-1}B(z,w)\begin{pmatrix}v_3\\ v_4\end{pmatrix}\right\}$$

となり，$T_pM\not\subset V$. 一方，$(x,y)=(0,0)$ のときは，$A(x,y)=(0,0)$ より，$\dim T_pM=2$ から $T_pM=\mathbb{R}^2\times\{0\}\subset V$. 従って，$T_pM=V$ であることは，$(x,y)=(0,0)$ であることと同値. 簡単な計算から，$(0,0,w,z)\in M\ \Leftrightarrow\ (z,w)=(-1,0),(1/2,\pm\sqrt{3}/2)$. よって，

$$T_pM=V\ \Leftrightarrow\ (x,y,z,w)=(0,0,-1,0),(0,0,1/2,\pm\sqrt{3}/2).$$

(c) $p=(x,y,z,w)$ が f の臨界点であることは，$T_pM\subset\operatorname{Ker}Df_p=\mathbb{R}^3\times\{0\}$ と同値. 上の (b) の解答における T_pM の表示を考えると，この条件は $(x,y)=(0,0)$ と同値. よって，(b) の解答より，f の臨界点は $(0,0,-1,0),(0,0,1/2,\pm\sqrt{3}/2)$.

2.
(a) $U_1^+=\{(x,y,z)\in S^2\mid x>0\}$, $W=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid X^2+y^2<1\}$, $V=\{(x,y)\in S^1\mid x>0\}$ とし, $\phi_1^+:U_1^+\to W$, $\psi:V\to(-1,1)$ を $\phi_1^+(x,y,z)=(y,z)$l, $\psi(x,y)=x$ で定めると，(U_1^+,ϕ_1^+), (V,ψ) はそれぞれ，S^2 と S^1 の局所座標を与え，$f(U_1^+)\subset V$. $(\phi_1^+)^{-1}(y,z)=(\sqrt{1-y^2-z^2},y,z)$ より，

$$\psi\circ f\circ(\phi_1^+)^{-1}(y,z)=\frac{\sqrt{(1-y^2-z^2)+2}}{2}=\frac{\sqrt{3-y^2-z^2}}{2}.$$

微分を取ると，

$$D(\psi\circ f\circ(\phi_1^+)^{-1})_{(y,z)}\left(-\frac{y}{2\sqrt{3-y^2-z^2}}\ \ -\frac{z}{2\sqrt{3-y^2-z^2}}.\right)$$

$\phi_1^+(1,0,0)=(0,0)$ は $\psi\circ f\circ(\phi_1^+)^{-1}$ の臨界点なので，$(1,0,0)$ は f の臨界点.

(b) (a) の解答から，U_1^+ における f の臨界点は $(1,0,0)=(\phi_1^+)^{-1}(0,0)$ のみ. $U_1^-=\{(x,y,z)\in S^2\mid x<0\}$, $\phi_1^-(x,y,z)=(y,z)$ として同様の計算をすると，U_1^- における f の臨界点は $(-1,0,0)$ のみ.

$U_2^+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y > 0\}$, $U_2^- = \{(x,y,z) \in S^2 \mid y < 0\}$ として $\phi_2^\pm : U_2^\pm \to W$ を $\phi_2^\pm(x,y,z) = (x,z)$ と定めると，$(U_2^\pm, \phi_2^\pm)$ は S^2 の局所座標で，$f(U_2^\pm) \subset V$．$(\phi_2^+)^{-1}(y,z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z)$ より，

$$\psi \circ f \circ (\phi_1^+)^{-1}(x,z) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{2}$$

微分を取ると，

$$D(\psi \circ f \circ (\phi_1^+)^{-1})_{(y,z)} \begin{pmatrix} -\frac{x}{2\sqrt{x^2+2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$p = (x,y,z) \in U_2^+$ が f の臨界点であることは，$(x,z) = \phi_2(x,y,z)$ が $\psi \circ f \circ (\phi_1^+)^{-1}$ の臨界点であること，すなわち，$x = 0$ と同値．同様の計算を (U_2^-, ϕ_2^-) についても行なうと，$p = (x,y,z) \in U_2^+ \cup U_2^-$ が f の臨界点であることは，$x = 0$ と同値．

$U_3^+ = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z > 0\}$, $U_3^- = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 0\}$ として $\phi_3^\pm : U_2^\pm \to W$ を $\phi_2^\pm(x,y,z) = (x,y)$ と定めると，$(U_3^\pm, \phi_3^\pm)$ は S^2 の局所座標で，$f(U_3^\pm) \subset V$．$(U_2^\pm, \phi_2^\pm)$ のときと同様の計算をすると，$p = (x,y,z) \in U_3^+ \cup U_3^-$ が f の臨界点であることは，$x = 0$ と同値．

以上より，f の臨界点全体のなす集合は，

$$\{(1,0,0), (-1,0,0)\} \cup (\{0\} \times S^1).$$

(c) $\operatorname{rank} D(g \circ f)_p \leq \operatorname{rank} Df_p \leq 1$ より，S^2 のすべての点は $g \circ f$ の臨界点．

3. $p \in C(g \circ f)$ と $\det D(g \circ f)_p = 0$ は同値．chain rule より $\det D(g \circ f)_p = \det Dg_{f(p)} \cdot \det Df_p$ なので，条件は，$\det Dg_{f(p)} = 0$，または $\det Df_p = 0$ であることと同値．この条件は，$p \in f^{-1}(C(g)) \cup C(f)$ と同値．

4. $\dim M = m$ とする．$p \in F(M)$ に対して，M が m 次元多様体であることから，開集合 $W \subset \mathbb{R}^n$ と C^∞ 写像 $f : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ で，$F^{-1}(p) \in W$, $M \cap W = f^{-1}(0)$, $\operatorname{rank} Df_q = n - m$ $(\forall q \in W)$ をみたすものが存在する．W を $U \cap W$ で置きかえることで，$W \subset U$ としてよい．

$p \in F(W)$ であり，$F(M) \cap F(W) = F(M \cap W) = (f \circ F^{-1})^{-1}(0)$．$F$ は微分同相であることから，$F(W)$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，$\operatorname{rank} D(f \circ F^{-1})_{q'} = \operatorname{rank} Df_{F^{-1}(q')} = n - m$．よって，$F(M)$ は多様体．