幾何学入門 演習問題 (2010 年 12 月 3 日)

注意事項

1. 解答時間は 12 時まで．11 時を過ぎたら解答を提出して退出してもよい．
2. 解答用紙は 2 枚ともに名前を書き，重ねて名前が見えるように二つ折りにして提出．(1 枚しか使わなかった場合は 1 枚のみを提出)．この問題用紙は持ち帰ってよい．
3. 解答用紙が足らなければ，監督の人に頼んで追加をもらってもよい．
4. 参考書やノートは参照してよいが，他人との相談は不可．
5. 略解は月曜日以降に，

   http://www.math.kyoto-u.ac.jp/ asaoka/lectures/10/geom-ex1.pdf

   に置く．
6. 解答の結果は成績には含まれない．

以下，$\mathbb{R}$ で実数全体，$\mathbb{R}^n$ で n 次元ユークリッド空間を表わすものとする．また，「多様体」とは，この講義におけるもの (数学的に正確な言いかたをするならば，ユークリッド空間の C^∞ 級部分多様体) を指すこととする．

1. 次の M_1 から M_3 がそれぞれが多様体であるかそうでないかを理由をつけて答えよ．また，多様体である場合にはその次元を求めよ．

$$M_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^3 + z^5 = 1\}$$
$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 - y^2 - 1 = z^3 - xy = 0\}$$
$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^4\}$$

2. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$ は 2 次元多様体であることが知られている (証明しなくてもよい)．$v = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ と置く．

(1) $p \in M$ における M の接空間を T_pM と書く．集合

$$M' = \{p \in M \mid v \in T_pM\}$$

は 1 次元多様体であることを示せ．

(2) $f : M \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

で定めるとき，f の臨界点集合は M' と一致することを示せ．

(3) 関数 $g : S^2 \to \mathbb{R}$ を

$$g(x, y, z) = x^2 + y^4$$

定めたとき，g の臨界点集合を求めよ．また，各臨界点が Morse 型 (非退化とも言う) であるかどうかを調べ，Morse 型であるときは，その指数を計算せよ．

幾何学入門 演習問題 略解

1. (a) $F_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $F_1(x,y,z)=x^2+y^3+z^5-1$ で定めると，

$$M_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F_1(x,y,z)=0\},$$
$$(DF_1)_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}2x & 3y^2 & 5z^4\end{pmatrix}.$$

$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ ならば，$(DF_1)_{(x,y,z)}\neq O$．$(0,0,0)\notin M_1$ より，M_1 は 2 次元多様体.

(b) $F_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $F_2(x,y,z)=(x^2+z^2-y^2-1, z^3-xy)$ と置くと，

$$M_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid F_2(x,y,z)=(0,0)\},$$
$$(DF_2)_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}2x & -2y & 2z\\ -y & -x & 3z^2\end{pmatrix}.$$

$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ ならば，$\mathrm{rank}(DF_2)_{(x,y,z)}=2$．$(0,0,0)\notin M_2$ より M_2 は 1 次元多様体.

(c) $M_3=\{(x,x^2)\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,-x^2)\mid x\in\mathbb{R}\}$．$(1,1)\in M_3$ は $\mathbb{R}$ の開集合 $\{t\in\mathbb{R}\mid 0<t<2\}$ と同相な近傍 $\{(x,x^2)\mid x\in(0,2)\}$ を持つので，もしも M_3 が多様体ならば，M_3 は 1 次元．しかし，$(0,0)\in M_3$ の任意の近傍 U について，$U\setminus\{(0,0)\}$ は 4 つの連結成分を持つので，U は $\mathbb{R}$ の開集合と同相にはなりえない．よって，M_3 は多様体ではない.

2. $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-1$ と置く.

(1) $p=(x,y,z)\in M$ における M の接平面は $\mathrm{Ker}\,DF_p$．よって，

$$G(x,y,z)=\begin{pmatrix}F(x,y,z)\\ DF_{(x,y,z)}(v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+2y^2+3z^2-1\\ 2x+4y+12z\end{pmatrix}$$

と置くと，$M'=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; G(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

$$DG_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}2x & 4y & 6z\\ 2 & 4 & 12\end{pmatrix}$$

より，$(x,y,z)\neq(0,0,0)$ ならば，$\mathrm{rank}\,DG_{(x,y,z)}=2$. $(0,0,0)\notin M'$ より，M' は 1 次元多様体.

(2) $\bar f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $\bar f(x,y,z)=(x-y, x+y-z)$ で定めると，$\bar f|_M=f$．また，

$$D\bar f_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

より，$\mathrm{Ker}\,\bar f_{(x,y,z)}=\{t\cdot v\mid t\in\mathbb{R}\}$.

$p\in M$ に対して，$T_pM=\mathrm{Ker}\,DF_p$ より，$\mathrm{Ker}\,Df_p=\mathrm{Ker}\,D\bar f_p\cap\mathrm{Ker}\,DF_p$．したがって，

$$\mathrm{rank}\,Df_p=2-\mathrm{Ker}\,Df_p=2-\dim\left(\mathrm{Ker}\,D\bar f_p\cap\mathrm{Ker}\,DF_p\right)$$

となり，$p \in M$ が f の臨界点であることと，$\mathrm{Ker}\, D\bar{f}_p \cap \mathrm{Ker}\, DF_p \neq \{0\}$，すなわち，$v \in \mathrm{Ker}\, DF_p = T_pM$ であることは同値.

(3) $F' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$，$\bar{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F'(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$, $\bar{g}(x,y,z) = x^2+y^4$ で定める．Lagnarge の未定乗数法より，$p \in S^2$ が g の臨界点であることと，$D\bar{g}_p = \lambda \cdot DF'_p$ となる $\lambda \in \mathbb{R}$ であることと同値．後者の条件は,

$$\begin{pmatrix} D\bar{g}_{(x,y,z)} \\ DF'_{(x,y,z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y^3 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

の階数が 2 でないことと等しいので，小行列式の計算により

$$xy(1-2y^2) = y^3z = xz = 0$$

と同値．よって，g の臨界点は,

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\,, \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

の 10 点．以下，それぞれの臨界点がMorse 型であるかそうでないかを調べ，Morse 型であるときはその指数を求める．

$\underline{(\pm 1, 0, 0),\ (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0)}$

$D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2 < 1\})$ と置き，S^2 の局所パラメータ表示 $\Phi_\pm : D \to S^2$ を

$$\Phi_\pm(s,t) = (\pm\sqrt{1-s^2-t^2}, s, t)$$

で定めると，$g \circ \Phi_\pm(s,t) = 1 - s^2 - t^2 + s^4$.

$$H_{g\circ\Phi_\pm}(s,t) = \begin{pmatrix} -2+12s^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

より，g の臨界点 $(\pm 1, 0, 0) = \Phi_\pm(0,0)$ は Morse 型で，その指数は 2．また，$(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2}, 0) = \Phi_\pm(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$ は Morse 型で，その指数は 1.

$\underline{(0, \pm 1, 0)}$

S^2 の局所パラメータ表示 $\Phi_\pm : D \to S^2$ を

$$\Phi_\pm(s,t) = \left(s, \pm\sqrt{1-s^2-t^2}, t\right)$$

で定めると，$g \circ \Phi_\pm(s,t) = 1 - s^2 - 2t^2 + 2s^2t^2 + s^4 + t^4$.

$$H_{g\circ\Phi_\pm}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

より，g の臨界点 $(0, \pm 1, 0) = \Phi_\pm(0,0)$ は Morse 型で，その指数は 2.

$\underline{(0, 0, \pm 1)}$

S^2 の局所パラメータ表示 $\Phi_\pm : D \to S^2$ を

$$\Phi_\pm(s,t) = \left(s, t, \pm\sqrt{1-s^2-t^2}\right)$$

で定めると，$g\circ\Phi_\pm(s,t)=s^2+t^4$.

$$H_{g\circ\Phi_\pm}(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

より，g の臨界点 $(0,0,\pm1)=\Phi_\pm(0,0)$ は Morse 型でない.

(3) <u>g を M 上の関数とした場合の解答</u>

$\bar{g}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $\bar{g}(x,y,z)=x^2+y^4$ で定める．Lagnarge の未定乗数法より，$p\in M$ が g の臨界点であることと，$D\bar{g}_p=\lambda\cdot DF_p$ となる $\lambda\in\mathbb{R}$ であることと同値．後者の条件は,

$$\begin{pmatrix}D\bar{g}_{(x,y,z)}\\DF_{(x,y,z)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&4y^3&0\\2x&4y&6z\end{pmatrix}$$

の階数が 2 でないことと等しいので，小行列式の計算により

$$xy(1-y^2)=yz=xz=0$$

と同値．よって，g の臨界点は,

$$(\pm1,0,0),\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(0,0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

の 6 点．以下，それぞれの臨界点が Morse 型であるかそうでないかを調べ，Morse 型であるときはその指数を求める．

<u>$(\pm1,0,0)$</u>

$D=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid s^2+t^2<1/3\})$ と置き，M の局所パラメータ表示 $\Phi_\pm:D\to M$ を

$$\Phi_\pm(s,t)=(\pm\sqrt{1-2s^2-3t^2},s,t)$$

で定める．

$$H_{g\circ\Phi_\pm}(0,0)=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-6\end{pmatrix}$$

より，g の臨界点 $(\pm1,0,0)=\Phi_\pm(0,0)$ は Morse 型で，その指数は 2.

<u>$(0,\pm1/\sqrt{2},0)$</u>

M の局所パラメータ表示 $\Phi_\pm:D\to M$ を

$$\Phi_\pm(s,t)=\left(s,\pm\sqrt{\frac{1-s^2-3t^2}{2}},t\right)$$

で定める．

$$H_{g\circ\Phi_\pm}(0,0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-3\end{pmatrix}$$

より，g の臨界点 $(0,\pm1/\sqrt{2},0)=\Phi_\pm(0,0)$ は Morse 型で，その指数は 1.

$\underline{(0,0,\pm 1\sqrt{3})}$
M の局所パラメータ表示 $\Phi_{\pm}: D \to M$ を

$$\Phi_{\pm}(s,t) = \left(s, t, \pm\sqrt{\frac{1-s^2-2t^2}{3}} \right)$$

で定める．

$$H_{g\circ\Phi_{\pm}}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，g の臨界点 $(0,0,\pm 1) = \Phi_{\pm}(0,0)$ は Morse 型でない.