幾何学入門 試験問題 (2011年1月28日)

以下，$\mathbb{R}$ で実数全体，$\mathbb{R}^n$ で n 次元ユークリッド空間を表わし，$r>0$ に対して，S_r^2 で 2 次元球面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=r^2\}$ を表わすものとする．また，「多様体」とは，この講義の前半で定義したもの (数学的に正確な言いかたをするならば，ユークリッド空間に埋め込まれた C^∞ 級多様体) を指すこととする．

1. $\mathbb{T}^2$ で 2 次元トーラス $\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2=z^2+w^2=1\}$ を表わすものとし，写像 $f:\mathbb{T}^2\to S^2_{\sqrt{2}}$ を

$$f(x,y,z,w)=(2(xy+zw),\ 2(xw-yz),\ x^2-y^2+z^2-w^2)$$

で定める．$\mathbb{T}^2$ の点 $(1,0,1,0)$ と $(1,0,0,1)$ が f の正則点であるかそうでないかを，理由をつけて答えよ．

2. 函数 $f:S_1^2\to\mathbb{R}$ を $f(x,y,z)=2x+yz$ で定めたとき，f の臨界点をすべて求めよ．さらに，各臨界点が Morse 型 (非退化ともいう) であるかどうかを調べ，Morse 型であるときはその指数を求めよ．

3. 次の M_1 から M_4 がそれぞれが多様体であるかそうでないかを理由をつけて答えよ．また，多様体である場合にはその次元を求めよ．

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x^2+y^2)z=0\}\\
M_2 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=x^2+y^2-z^2=1\}\\
M_3 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^3+y^3+z^3=x^5-y^5=2\}\\
M_4 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid {}^{\exists}k=1,2,\cdots \text{ s.t. } k(x^2+y^2+z^2)=1\}
\end{aligned}$$

4. $n\geq 1$ とし，$M\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ を n 次元多様体とする．$v\in\mathbb{R}^{2n+1}$ に対して，$M+v=\{p+v \mid p\in M\}$ と置く．$\mathbb{R}^{2n+1}$ の部分集合 Y を $Y=\{v\in\mathbb{R}^{2n+1} \mid M\cap(M+v)=\emptyset\}$ で定めると，Y の閉包は $\mathbb{R}^{2n+1}$ と一致することを示せ．

5. 次の主張 (a)(b) が正しければ証明せよ．正しくなければ反例を挙げよ．

(a) $M\subset\mathbb{R}^n$ が m 次元多様体であるとき，M の開部分集合もまた m 次元多様体．
(b) $M_1,M_2\subset\mathbb{R}^n$ が多様体であるとき，$M_1\cap M_2$ も多様体．

幾何学入門 演習問題 略解

1. f の拡張 $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ を f と同じ多項式で定める．$p=(x,y,z,w)\in\mathbb{T}^2$ での F の微分は，

$$DF_p=\begin{pmatrix}2y & 2x & 2w & 2z\\ 2w & -2z & -2y & 2x\\ 2x & -2y & 2z & -2w\end{pmatrix},$$

接ベクトル空間は，$T\mathbb{T}^2_p=\{(s,t,u,v)\mid xs+ty=zu+wv=0\}$.

$p_1=(1,0,1,0)$ とする．$e_2=(0,1,0,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$ は $T\mathbb{T}^2_{p_1}$ の基底で，$DF_{p_1}(e_2)=(2,-2,0)$, $DF_{p_1}(e_4)=(2,2,0)$ より，$Df=DF|_{T_{p_1}\mathbb{T}^2}$ の階数は 2. よって，p_1 は f の正則点.

$p_2=(1,0,0,1)$ とする．$e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$ は $T\mathbb{T}^2_{p_2}$ の基底で，$DF_{p_2}(e_2)=(2,0,0)$, $DF_{p_2}(e_3)=(2,0,0)$ より，$Df=DF|_{T_{p_2}\mathbb{T}^2}$ の階数は 1. よって，p_1 は f の臨界点.

2. $G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ で $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を定めると，$S^2_1=\{p\in\mathbb{R}^3\mid G(p)=0\}$. $(x,y,z)\in S^2_1$ に対して，$DG_{(x,y,z)}=(2x\ 2y\ 2z)\neq(0\ 0\ 0)$. Lagrange の未定乗数法より，$p=(x,y,z)\in S^2$ が f の臨界点であることと，$Df_p=\lambda\cdot DG_p$ となる λ が存在することは同値. 計算すると，後者の条件は，$(x,y,z)=(\pm1,0,0)$ と同値であることがわかる.

$D^2=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid s^2+t^2<1\}$ と置き，S^2_1 の局所パラメータ表示 $\Phi_\pm: D^2\to S^2$ を $\Phi_\pm(s,t)=(\pm\sqrt{1-s^2-t^2},s,t)$ で定めると，$\Phi_\pm(0,0)=(\pm1,0,0)$. $f\circ\Phi_\pm$ の $(0,0)$ でのヘッセ行列を計算すると，

$$\begin{pmatrix}\mp2 & 1\\ 1 & \mp2\end{pmatrix}$$

となるので，$(1,0,0)$, $(-1,0,0)$ はともに f の Morse 型臨界点で，その指数は 2 と 0.

3. $M_1=(\mathbb{R}^2\times\{0\})\cup(\{(0,0)\}\times\mathbb{R})$. もしも M_1 が n 次元多様体ならば，$(0,0,0)\in M_1$ の M_1 における近傍で，n 次元開円盤 D^n と同相なものが存在する．D^n かた一点を引いたものは，連結 $(n\neq2)$，または，二つの連結成分を持つ．$(n=1)$. しかし，$M_1\setminus\{(0,0,0)\}$ は 3 つの連結成分を持つので，すべての n について，M_1 は n 次元多様体ではありえない.

$G(x,y,z)=(x^2+y^2-1,z)$ とすると，$M_2=\{p\in\mathbb{R}^3\mid G(p)=0\}$. $DG_{(x,y,z)}$ の階数は 1 以下となるのは，$x=y=0$ のときなので，$p\in M_2$ ならば DG_p の階数は 2. 陰関数定理より M_2 は 1 次元多様体.

$G(x,y,z)=(x^3+y^3+z^3, x^5+y^5)$ とすると，$M_3=\{p\in\mathbb{R}^3 \mid G(p)=0\}$. $DG_{(x,y,z)}$ の階数が 1 以下となるのは，x,y,z のいずれか 2 つが 0 のときなので，$p\in M_3$ ならば DG_p の階数は 2. 陰関数定理より，M_3 は 1 次元多様体.

$\mathbb{R}^3$ の開集合 $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上の函数 G を $G(x,y,z)=\sin\frac{\pi}{x^2+y^2+z^2}$ で定めると，$M_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus G(x,y,z)=0\}$. $p=(x,y,z)$ に対して，$\|p\|^2=x^2+y^2+z^2$ とおくと，

$$DG_{(x,y)}=\begin{pmatrix}-\frac{2x}{\|p\|^4}\cos\frac{\pi}{\|p\|^2} & -\frac{2y}{\|p\|^4}\cos\frac{\pi}{\|p\|^2} & -\frac{2z}{\|p\|^4}\cos\frac{\pi}{\|p\|^2}\end{pmatrix}.$$

よって，$(x,y,z)\in M_4$ ならば $DG_{(x,y,z)}$ の階数は 1. 陰関数定理より，M_4 は多様体.

4. $F: M\times M\to\mathbb{R}^{2n+1}$ を $F(p,q)=p-q$ で定めると，$M\cap(M+v)$ が空でないことと，v が F の像 $F(M\times M)$ に含まれることは同値. 一方，$M\times M$ は $2n$ 次元なので，$M\times M$ の任意の点は臨界点. Sard の定理より，F の臨界値集合 $F(M\times M)$ は測度 0 の集合なので，$Y=\mathbb{R}^{2n+1}\setminus F(M\times M)$ の閉包は $\mathbb{R}^{2n+1}$ と一致する.

5. (a) V を M の開部分集合とする. $p\in V$ に対して， $\mathbb{R}^m$ の開部分集合 U と M の局所パラメータ表示 $\Phi: U\to M$，$x_0\in U$ を $\Phi(x_0)=p$ となるように取る. $U'=\Phi^{-1}(V)$ は x_0 を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合で，Φ の U' への制限 Φ' は，$\Phi'(x_0)=p$ をみたす M の局所パラメータ表示. V のすべての点に対して，その点を像に含む m 次元局所パラメータ表示が取れるので，V は m 次元多様体.

(b) $M_1=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$, $M_2=\{(x,y,xy)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ とすると，M_1,M_2 は 2 次元多様体 ($(x,y)\mapsto(x,y,0)$, $(x,y)\mapsto(x,y,xy)$ が局所パラメータ表示). しかし，$M_1\cap M_2=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}, xy=0\}$ は多様体ではない ($(0,0,0)$ を含む開集合で，$\mathbb{R}^m(m\geq 0)$ の開集合と同相なものが取れない).