幾何学入門 試験問題

以下，$\mathbb{R}$ で実数全体，$\mathbb{R}^N$ で N 次元ユークリッド空間を表わすものとする．また,「多様体」とは講義において定義したものとする (数学における標準的な言葉づかいでは「ユークリッド空間の部分多様体」に相当する).

1. 次の $\mathbb{R}^3$ の部分集合が多様体であるか，そうでないか理由をつけて答えよ．また，多様体である場合はその次元を求めよ．
   (a) $M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$
   (b) $M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = x+y+z = 1\}$
   (c) $M_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$
   (d) $M_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 0\}$
   (e) $M_5 = \{(x,y,1/n) \mid x,y \in \mathbb{R}, n = 1,2,3,\cdots\}$
   (f) $M_6 = M_5 \cup \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

2. $\mathbb{R}^3$ 上の函数 f を $f(x,y,z) = x^2+y^3+z^3-2$ で定め，$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ と置く．
   (a) M は 2 次元多様体であることを示せ．
   (b) $T_pM = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid v+w = 0\}$ となる $(x,y,z) \in M$ をすべて求めよ．
   (c) L を 2 次元多様体 $\{(x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \mid x'+y'+z'-2 = 0\}$ とし，C^∞ 級写像 $F : M \to L$ を $F(x,y,z) = (x^2,y^3,z^3)$ で定める．このとき，$(0,1,1)$ は F の正則点，臨界点のどちらであるか，理由をつけて答えよ．
   (d) M 上の C^∞ 級函数 h を $g(x,y,z) = 4x^2+3y^2+2z^3$ で定めたとき，$(0,1,1)$ は g のモース型臨界点であることを示せ．また，その指数を求めよ．

3. 正の整数 N に対して，
$$D^{N+1} = \{(x_0,\cdots,x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x_0^2+\cdots x_N^2 \leq 1\}$$
$$S^N = \{(x_0,\cdots,x_N) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x_0^2+\cdots x_N^2 = 1\}$$
と定める．正の整数 $n > m$ と C^∞ 級写像 $h : S^m \to S^n$ に対して，連続写像 $\bar{h} : D^{m+1} \to S^n$ で h の拡張になっているもの，すなわち，すべての $p \in S^m$ に対して $\bar{h}(p) = h(p)$ をみたすものが存在することを示せ．

解答例

1.

(a) M_1 は $\mathbb{R}^3$ の開集合なので，包含写像 $i : M_1 \to \mathbb{R}^3$ を局所座標とする 3 次元多様体.

(b) $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1, x+y+z-1)$ とすると，

$$DF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

DF の階数が 2 よりも小さくなるのは，$x=y=z$ のとき．しかし，この条件をみたす M_2 の点は存在しない．よって，すべての $p \in M$ において DF_p の階数は 2 となり，M_2 は 1 次元多様体.

(c) 仮に M_3 が多様体であるとする．M_3 内の C^∞ 曲線 $l : \mathbb{R} \to M_3$, $k : \mathbb{R} \to M_3$ を $l(t) = (t,t,0)$, $k(t) = (0,0,t)$ で定めると，$\dot{l}(0) = (1,1,0)$ と $\dot{k}(0) = (0,0,1)$ は $T_{(0,0,0)}M_3$ に属する．よって，$(1,1,1) = \dot{l}(0) + \dot{k}(0)$ も $T_{(0,0,0)}M_3$ に属する．従って，$\epsilon > 0$ と C^∞ 曲線 $l_* : (-\epsilon, \epsilon) \to M_3$ で，$l_*(0) = (0,0,0)$,$\dot{l_*}(0) = (1,1,1)$ となるものが存在するが，十分小さい $t > 0$ に対して，$l_*(t)$ の各成分は正の実数となり，$l_*(t) \in M_3$ に反する．従って，M_3 は多様体ではない.

(d) $M_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ なので，$F(x,y,z) = (x,y)$ と置けば，$M_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$. DF の階数は 2 なので，M_4 は 1 次元多様体.

(e) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$,$F(x,y,z) = \sin(2\pi nz)$ とすると，$M_5 = \{(x,y,z) \in U \mid F(x,y,z) = 0\}$. U は $\mathbb{R}^3$ の開集合であり，$(x,y,z) \in M_5$ のとき，$DF_{(x,y,z)} \neq 0$ なので，M_5 は 2 次元多様体.

(f) M が多様体ならば，$p \in M$ の周りでの局所座標 (U, ϕ) として，(U を小さく取りなおすことにより)U が連結集合であるものを取ることができる．すなわち，p を含む $\mathbb{R}^N$ の開集合 $\tilde{U}$ で，$M \cap \tilde{U}$ が連結であるものが取れる．しかし，M_6 については，$(0,0,0)$ を含むどのような $\mathbb{R}^N$ の開集合も連結ではないので，$(0,0,0)$ における局所座標を取ることができないため，M_6 は多様体ではない.

2.

(a) $Df_{(x,y,z)} = (2x\, 3y^2\, 3z^2)$ であり，$Df_{(x,y,z)} = 0$ となるのは $(x,y,z) = (0,0,0)$ のみ．$(0,0,0) \notin M$ より，すべての $p \in M$ において Df_p の階数は 1. よって，M は 2 次元多様体.

(b) $V = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid v + w = 0\}$ とすると，V は $e_1 = (1,0,0)$ と $e_2 = (0,1,-1)$ を基底に持つ．$T_pM = V$ であることと，$Df_p(e_1) = Df_p(e_2)$ であること，すなわち，$2x = 3y^2 - 3z^2 = 0$ と同値．$x^2 + y^3 + z^3 - 2 = 0$ の条件のもとでこの方程式を解くと，解は $(x,y,z) = (0,1,1)$. よって，$T_pM = V$ である点は，$p = (0,1,1)$.

(c) $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,-1)$ は $T_{(0,1,1)}M$ の基底で，

$$DF_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

より， $DF_{(0,1,1)}(e_1) = (0,0,0)$，$DF_{(0,1,1)}(e_2) = (0,3,-3)$. $DF_{(0,1,1)}$ の階数は 1 となり，$(0,1,1)$ は F の臨界点.

(d) $U = \{(x,y,z) \in M \mid z > 0\}$, $\phi(x,y,z) = (x,y)$ とすると，$\phi^{-1}(x,y) = (x, y, [2 - x^2 - y^3]^{1/3})$ は $\phi(U)$ 上で C^∞ 級なので，(U, ϕ) は $(0,1,1)$ の周りでの局所座標を定める.

$$g \circ \phi^{-1}(x,y) = 4x^2 + 3y^2 + 2(2 - x^2 - y^3) = 2x^2 + 3y^2 - 2y^3 + 4.$$

よって，

$$D(g\circ\phi^{-1})_{(x,y)} = (4x\ 6y-6y^2)$$
$$H_{g\circ\phi^{-1}}(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6-12y \end{pmatrix}.$$

$\phi(0,1,1)=(0,1)$ であり，$D(g\circ\phi^{-1})_{(0,1)}=0$ より，$(0,1,1)$ は g の臨界点．$H_{g\circ\phi^{-1}}(0,1)$ は 4 と -6 を対角成分とする対角行列なので，臨界点 $(0,1,1)$ の指数は 1.

3. $m<n$ より，h の像はすべて臨界値．Sard の定理より，h の像に含まれない $p\in S^n$ が存在する．X を S^n から p を除いた集合とする．$x\in X$, $t\in[0,1]$ に対して，$tx-(1-t)p\neq 0$ なので，連続写像 $H: X\times[0,1]\to S^n$ を

$$H(x,t) = \frac{tx-(1-t)p}{\|tx-(1-t)p\|}$$

で定めることができる．すべての $t\in[0,1]$ に対して $H(-p,t)=-p$ であることを用いると，連続写像 $\bar{h}: D^{m+1}\to X$ を，$y\in S^m$, $t\in[0,1]$ に対して

$$\bar{h}(t\cdot y) = H(h(y),t)$$

とすることで定めることができる．$H(x,1)=x$ より，$\bar{h}(y)=h(y)$ がすべての $y\in S^m$ について成り立つ．