物理のための数学2　試験問題

担当: 武末　2010年2月4日

I. 正則関数 $f(z)$ に対し、$g(x,y)=|f(x+iy)|$, (x, y は実数) とおくと、$f(x+iy)\neq 0$ かつ $f'(x+iy)\neq 0$ のとき、$\nabla^2 \log g(x,y)=0$ および $\nabla^2 g(x,y)>0$ が成り立つことを示せ。ただし、∇^2 は2次元のラプラス演算子 $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。

II. 関数 $f(z)$ は、複素平面の原点を中心とする単位円を含む領域で正則であり、この単位円周上では、実軸の正の向きから測った角度を θ とするとき

$$\frac{a-\cos\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}+i\frac{\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}$$

$= \dfrac{1}{a-e^{i\theta}} = \dfrac{1}{a-z}$

という値を取る。ただし、$a>1$ である。$f(z)$ を $z=0$ の周りでベキ級数に展開することにより、この関数を求めよ。

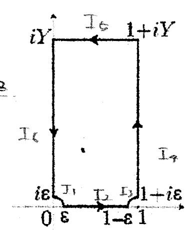
III. 次の積分の値を複素積分の方法により求めよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+a^3}$ (a は正の定数)

(ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^{\alpha+1}}dx$ $(0<\alpha<2)$

IV. (i) 右図の積分路で $\log(1-e^{i2\pi z})$ を積分することで、

$\ln 2\sin\pi z + i\dfrac{\pi+2\pi z}{2}$



$$\int_0^1 \log(\sin\pi x)\,dx$$

を求めよ。($Y\to\infty$, $\varepsilon\to +0$ とせよ。)

(ii) Γ 関数は、(a) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, (b) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ などの性質を満たす。$x>0$ に対し、次の積分を求めよ。

$$\int_x^{x+1}\log\Gamma(t)\,dt$$

(iii) $\Gamma(x)$ が増加関数となるような十分大きな正の x (例えば $x>2$ であれば十分) で、

$$\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x \leqq \Gamma(x) \leqq \sqrt{2\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

が成り立つことを示せ。

(ヒント: $x>0$ に対し $\log\Gamma(x)$ は下に凸 (すなわち、$(\log\Gamma(x))''\geqq 0$) であることを証明なしに用いてよい。)