２０１１年度物理のための数学１　試験

10:30-12:00 25th July 2011

(1) 次の関数の勾配 (gradient) を計算せよ。

(i) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$

(ii) e^{-r}/r

ここで $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

(2) 次のベクトル場の発散 (divergence) と回転 (rotation) を計算せよ。

(i) $\mathbf{r}/\mathrm{r}$.

(ii) $(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y)/(x+y)$.

ここで $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ は各々 x, y 軸の単位ベクトル。

(3) 閉曲面 S によって囲まれる領域内 V に原点を持つ位置ベクトル $\mathbf{r}$ を考える。このとき次の積分を以下の小問に従って計算せよ。

$$\int_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}dS.$$

ここで $r=|\mathbf{r}|$, $\mathbf{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトル。

(i) $1/r$ のラプラシアンを計算せよ。

(ii) S と交わらない原点を囲む半径 ρ の微小球面 S' を考え、S と S' によって挟まれる領域 V' について上小問の結果とガウスの定理を用いて、上の積分を計算せよ。なお、$\mathbf{r}$ の原点は S 上にはないものとする。

(4) 周期 2π の関数 $f(x)=x^4$ $(-\pi<x<\pi)$ をフーリエ級数に展開せよ。

(5) $a>|x|$ で $f(x)=1-x^2/a^2$、$a\le|x|$ で $f(x)=0$ となる関数をフーリエ変換せよ。

(6) 曲面 S の法線ベクトル (の成分) を n_i としたとき[1]、S 上で $(\delta_{ik}-n_in_k)\partial_k n_j=0$ を満足する面を考える。この面が何か議論せよ[2]。なお、添字 i,j,k は直交座標 x,y,z をとり、同じ添字が繰り返されている場合は和をとる (Einstein の縮約則)。(配点 2 点)

[1] 法線ベクトル $\mathbf{n}$ は各軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_i$ を用いて $\mathbf{n}=n_i\mathbf{e}_i$ と書ける。

[2] ヒント：$\delta_{ij}-n_in_j$ はどのような演算？