2011年度　量子力学I試験問題

1. 深さが $-V_0 < 0$、到達範囲が $-a < x < a$ である井戸型のポテンシャル中での質量 m の粒子のパリテイがプラスの束縛状態 (結合状態) についての次の問題に答えなさい。ただし、$a > 0$.
   (a) $|x| < a$ を領域I, $a < |x|$ を領域II, と呼ぶ。各領域の波動関数をそれぞれ $\varphi_{\mathrm{I}}(x)$, $\varphi_{\mathrm{II}}(x)$ と書く。エネルギー固有値を E として、定常状態における各領域のシュレーディンガー方程式を書きなさい。
   (b) $|x| \to \infty$ での境界条件を書きなさい。
   (c) $|x| = a$ での接続条件を書きなさい。
   (d) このポテンシャルに対して、パリティがプラスの束縛状態が2個だけ存在するという。$\sqrt{2ma^2V_0/\hbar^2}$ はどの範囲にあるか、求めなさい。
   また、そのパリティがプラスで2番目のエネルギーを持つ状態の波動関数の概形を描きなさい。(波動関数の極大、極小値の位置の x 座標と a の値の大小に注意して描くこと。)

2. x 軸上の1次元自由粒子を考える。ただし、質量を m とする。$t = 0$ での波動関数が

$$\psi(x, t = 0) = N\mathrm{e}^{-ax^2}$$

   で与えられているとき、次の問いに答えなさい. ただし、$\psi(x, t)$ は次の時間に依存するシュレーディンガー方程式を満たす：

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x, t).$$

   (a) 規格化定数 N を求めよ。
   (b) 任意の時刻 $t > 0$ での波動関数 $\psi(x, t)$ を求めよ。
   (c) $t > 0$ での x^2 の期待値

$$\langle x^2\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi(x,t)^* x^2\psi(x,t)$$

   を求め、それが時間とともに増大していくことを確かめよ。また、その物理的理由を、不確定性関係に関連させて述べなさい。

3. 1次元空間内で、質量が m_1、m_2 の量子力学的な2つの粒子の間にポテンシャル $V(x)$ が作用している。ただし、x_1, x_2 をそれぞれの座標とし、$x = x_1 - x_2$ は粒子間の相対座標である。重心座標を X と書く。この系の波動関数を $\Psi(x_1, x_2) = R(X)\varphi(x)$ と表したとき、$R(X)$ および $\varphi(x)$ がそれぞれ従うシュレーディンガー方程式を書きなさい。

4. 球対称ポテンシャル $V(r)$ の中を運動している質量 m の量子力学的粒子の束縛状態を考える。このときのハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(r). \quad \text{ただし、} r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

その粒子の軌道角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ と書くことにする.

(a) $\hat{\boldsymbol{L}}$ と $\hat{H}$ が可換であることを示しなさい:すなわち、

$$[\hat{\boldsymbol{L}}, \hat{H}] = 0.$$

(b) 運動エネルギーの演算子は、極座標表示で

$$\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2}, \tag{1}$$

と書ける。ただし、

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

$V(r) = kr^2/2 = k(x^2 + y^2 + z^2)/2$ のときを考える. s 波の束縛状態の波動関数が $\varphi(\boldsymbol{r}) = N\mathrm{e}^{-\alpha r^2}Y(\theta, \phi)$ と書かれているとき、α とエネルギー固有値 E を求めなさい。N は規格化定数である。