

2009年度 量子力学II 試験問題

以下の問題すべてに答えなさい。試験時間は1時間である。

1. 次のハミルトニアンで記述される1粒子系を考える。ただし、粒子は単位質量を持つとした。

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1, \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \hat{x}^2, \quad \hat{H}_1 = \hat{x}. \quad (1)$$

消滅および生成演算子を次のように定義する; $\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \hat{p}$, $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} \hat{p}$.
このとき、 $\hat{H}_0 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ と書ける。

以上を踏まえて、以下の問いに答えなさい。

- (a) 非摂動ハミルトニアン \hat{H}_0 の基底状態のエネルギー ϵ_0 と波動関数 $\varphi_0(x)$ を求めなさい。(波動関数は規格化されていなくてもよい。)
 - (b) λ について1次および2次の摂動による基底状態のエネルギーの変化 $\delta\epsilon_1$ と $\delta\epsilon_2$ をそれぞれ求めなさい。
 - (c) 全ハミルトニアン \hat{H} の基底状態のエネルギー $E_0(\lambda)$ を λ の関数として求め、(b)の結果と比較し、その結果が正しいことを確認しなさい。
2. 陽子はスピン $\frac{1}{2}$ を持っている。その演算子を $\hat{s} = \frac{1}{2}\sigma$ と書こう。(ただし、 \hbar を単位とする。) ここで、 σ はパウリ行列である。
そのスピンの上向きおよび下向きの状態をそれぞれ $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ と書くことにする。さらに、1番目の陽子のスピン \hat{s}_1 が上向きで2番目の陽子のスピン \hat{s}_2 が下向きのときの合成系の状態ベクトルを $|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ などと書くことにする。
- (a) 2つの陽子のスピン \hat{s}_1 と \hat{s}_2 を合成したとき、全スピン $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ の大きさ S の最大値 S_{max} と最小値 S_{min} はそれぞれいくらか。
 - (b) S が S_{max} の場合について、合成系の規格化された状態ベクトルをすべて書きなさい。
 - (c) S が S_{min} の場合について、合成系の規格化された状態ベクトルをすべて書きなさい。
 - (d) 2つのスピンの内積 $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$ の値を $S = S_{max}$ と $S = S_{min}$ の場合についてそれぞれ求めなさい。
 - (e) 1個の陽子を原子核とする水素原子2個からなる水素分子を考える。2個の陽子のスピンが平行のとき、2個の陽子の相対運動の軌道角運動量の大きさはどのような値でなければならないか? 理由とともに答えなさい。