2011 年度　量子力学 2 試験問題解答例

以下は 2011 年度量子力学 2 期末試験問題の解答例である。解説も兼ねて関連事項も含めてできるだけ丁寧に書いたので少し長い解答になっている。実際の解答は基礎事項は省略してもっと簡潔でよい。

1(a)

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger\hat{a} &= (\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}})(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega}(\frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{\omega^2}{2}\hat{x}^2) + \frac{i}{2\hbar}[\hat{x},\, \hat{p}] \\ &= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

ここで、$[\hat{x},\, \hat{p}] = i\hbar$ を用いた．よって、

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}).$$

(b) 前問より,

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \sum_{k=1,2}\left(\frac{\hat{p}_k^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}\hat{x}_k^2\right) \\ &= \sum_{k=1,2}\left(\hbar\omega(\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k + \frac{1}{2})\right) \\ &= \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x \,+\, \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y \,+\, 1).\end{aligned}$$

(c) $n_x + n_y$ は 0 以上のすべての整数値を取る．第 2 励起状態のエネルギーは $n_x + n_y = 2$ の場合である。このときエネルギーは

$$3\hbar\omega \equiv E_2.$$

これを実現するのは、

$$(n_x,\, n_y) = (1,\, 1),\, (2,\, 0),\, (0,\, 2)$$

の 3 通りがある。よって、縮退度は 3 である。

(d) まず、$\hat{x}_k, \hat{p}_k$ を $\hat{a}_k$ および $\hat{a}^\dagger$ を用いて表わす。簡単な計算から、

$$\hat{x}_k \,=\, \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k), \quad \hat{p}_k \,=\, i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\,(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k).$$

したがって、

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 &= \lambda\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(\hat{a}_x^\dagger+\hat{a}_x)i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\,(\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_y)\,-\,\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(\hat{a}_y^\dagger+\hat{a}_y)i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\,(\hat{a}_x^\dagger-\hat{a}_x)\right]\\ &= i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y+\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_x\hat{a}_y-\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x^\dagger+\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x-\hat{a}_y\hat{a}_x^\dagger+\hat{a}_y\hat{a}_x)\\ &= i\frac{\hbar}{2}(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y+\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_x\hat{a}_y-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y^\dagger+\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y+\hat{a}_x\hat{a}_y)\\ &= i\hbar\,(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y). \end{aligned}\tag{0.1}$$

ここで,異なる添え字を持つ生成消滅演算子は可換であることを用いた．たとえば、$k\neq l$ のとき, $\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_l=\hat{a}_l\hat{a}_k^\dagger$. また、添え字によらず生成演算子、あるいは消滅演算子どうしは可換であることも自由に用いた: すなわち、 $k,l=1,2$ に対して, $\hat{a}_k\hat{a}_l=\hat{a}_l\hat{a}_k$.
よって、

$$\hat{H}_1=i\hbar\lambda(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)\equiv\lambda\hat{\mathcal{H}}_1.$$

(e) $\hat{H}_0$ の第 1 励起状態のエネルギーは $E_1=2\hbar\omega$, そしてその 2 重に縮退している規格化された状態ベクトルは

$$|1\rangle\otimes|0\rangle=\hat{a}_x^\dagger|0,\,0\rangle\equiv|1),\quad |0\rangle\otimes|1\rangle=\hat{a}_y^\dagger|0,\,0\rangle\equiv|2),$$

と書ける．このとき、

$$(1|2)=0$$

に注意.
さて、$\hat{H}$ の固有状態で $\lambda\to0$ のとき、エネルギー固有値が $E_1=2\hbar\omega$ になる状態を $|\tilde{1}\rangle$ と書くことにする:

$$\hat{H}|\tilde{1}\rangle=E(\lambda)|\tilde{1}\rangle.\tag{0.2}$$

ただし、

$$\lim_{\lambda\to0}E(\lambda)=E_1.$$

次に,固有状態 $|\tilde{1}\rangle$ とエネルギー固有値 $E(\lambda)$ を λ で展開する.

$$|\tilde{1}\rangle=\sum_{i=1}^{2}c_i|i)\,+\,\lambda|\tilde{1})^{(1)}+\cdots,\quad E(\lambda)=E_1+\lambda\epsilon_1+\cdots.$$

これらと $\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{\mathcal{H}}_1$ を (0.2) に代入すると、

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (\hat{H}_0+\lambda\hat{\mathcal{H}}_1)\left(\sum_{i=1}^{2}c_i|i)\,+\,\lambda|\tilde{1})^{(1)}+\cdots\right)\\ &= \sum_{i=1}^{2}c_i\hat{H}_0|i)+\lambda\hat{H}_0|\tilde{1})^{(1)}+\lambda\sum_{i=1}^{2}c_i\hat{\mathcal{H}}_1|i)+\cdots,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2} c_i E_1|i) + \lambda \hat{H}_0|\tilde{1})^{(1)} + \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i \hat{\mathcal{H}}_1|i) + \cdots, \\
\text{右辺} &= (E_1 + \lambda\epsilon_1 + \cdots)(\sum_{i=1}^{2} c_i|i) \,+\, \lambda|\tilde{1})^{(1)} + \cdots) \\
&= \sum_{i=1}^{2} c_i E_1|i) \,+\, \lambda E_1|\tilde{1})^{(1)} + \lambda\epsilon_1 \sum_{i} c_i|i) + \cdots.
\end{aligned}
$$

λ^1 の係数を等しいと置くと,

$$
\hat{H}_0|\tilde{1})^{(1)} + \sum_{i=1}^{2} c_i \mathcal{H}_1|i) = E_1|\tilde{1})^{(1)} + \epsilon_1 \sum_{i=1}^{2} c_i|i).
$$

この両辺と $(j|$ との内積を取ると,

$$
\begin{aligned}
E_1(j|\tilde{1})^{(1)} + \sum_{i=1}^{2} c_i\,(j|\hat{\mathcal{H}}_1|i) &= E_1(j|\tilde{1})^{(1)} + \epsilon_1 \sum_{i=1}^{2} c_i(j|i) \\
&= E_1(j|\tilde{1})^{(1)} + \epsilon_1\, c_j.
\end{aligned}
$$

両辺を整理して[1] 、

$$
\sum_{i=1}^{2}(j|\hat{\mathcal{H}}_1|i)\, c_i \,=\, \epsilon_1 c_j.
$$

ここで、

$$
(\boldsymbol{A})_{ji} \equiv (j|\hat{\mathcal{H}}_1|i),
$$

と置けば分かるように、これは行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値方程式である。
次にこの行列要素を求めよう.

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_1|1) &= i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)|0\rangle \otimes |1\rangle \\
&= i\hbar(\hat{a}_x|1\rangle \otimes \hat{a}_y^\dagger|0\rangle - \hat{a}_x^\dagger|1\rangle \otimes \hat{a}_y|0\rangle) \\
&= i\hbar|0\rangle \otimes |1\rangle \\
&= i\hbar|2), \\
\hat{\mathcal{H}}_1|2) &= i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)|1\rangle \otimes |0\rangle \\
&= i\hbar(\hat{a}_x|0\rangle \otimes \hat{a}_y^\dagger|1\rangle - \hat{a}_x^\dagger|0\rangle \otimes \hat{a}_y|1\rangle) \\
&= -i\hbar|1\rangle \otimes |0\rangle \\
&= -i\hbar|1).
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A})_{11} &= (1|\hat{\mathcal{H}}_1|1) = 0, \quad (\boldsymbol{A})_{12} = (1|\hat{\mathcal{H}}_1|2) = -i\hbar, \\
(\boldsymbol{A})_{21} &= (2|\hat{\mathcal{H}}_1|1) = i\hbar, \quad (\boldsymbol{A})_{22} = (2|\hat{\mathcal{H}}_1|2) = 0.
\end{aligned}
$$

[1] 実際の解答は、縮退のある場合の摂動論の公式としてここから書いてもよい。

すなわち,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar \\ i\hbar & 0 \end{pmatrix}.$$

行列 $\boldsymbol{A}$ に対する固有値問題は簡単に解くことができて、固有値は

$$\epsilon_1 = \pm\hbar.$$

それぞれの固有ベクトルは,

$$\begin{aligned} |\tilde{1})_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1) + i|2)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle + i|0\rangle \otimes |1\rangle], \\ |\tilde{1})_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|1) - i|2)] = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle \otimes |0\rangle - i|0\rangle \otimes |1\rangle]. \end{aligned}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned} |1,\, 1\rangle &= |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\ |1,\, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \\ |1,\, -1\rangle &= |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\ |0,\, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle). \end{aligned}$$

(b) 陽子はフェルミオンだから、座標 $\xi_i = (\boldsymbol{r}_i, \sigma_i)$ の入れ替えに対して、全波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1,\, \sigma_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, \sigma_2)$ は、符号を変えなければならない:

$$\Psi(\boldsymbol{r}_2,\, \sigma_2,\, \boldsymbol{r}_1,\, \sigma_1) = -\Psi(\boldsymbol{r}_1,\, \sigma_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, \sigma_2).$$

また、2 陽子に働くポテンシャルは相対座標にしか依らないから、全波動関数は重心座標 $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$ と相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ を用いて

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\, \sigma_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, \sigma_2) = \Phi(\boldsymbol{R})\phi(\boldsymbol{r})\chi(\sigma_1,\, \sigma_2)$$

と表わされる.

さて、位置座標 $\boldsymbol{r}_i$ の入れ替えに対して、重心座標 $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$ は不変, 相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ は符号を変えることに注意しよう: $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$. すなわち、相対座標はパリティ変換をする. よって、

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{r}_2,\, \sigma_2,\, \boldsymbol{r}_1,\, \sigma_1) &= \Phi(\boldsymbol{R})\phi(-\boldsymbol{r})\chi(\sigma_2,\, \sigma_1) \\ &= -\Psi(\boldsymbol{r}_1,\, \sigma_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, \sigma_2) \equiv -\Phi(\boldsymbol{R})\phi(\boldsymbol{r})\chi(\sigma_1,\, \sigma_2). \end{aligned}$$

ところが、合成スピンの大きさ S が 0 のとき、スピン波動関数は座標の入れ替えに対して反対称である[2] : $\chi(\sigma_2,\, \sigma_1) = -\chi(\sigma_1,\, \sigma_2)$. したがって、$\phi(-\boldsymbol{r}) = \phi(\boldsymbol{r})$. すなわち、軌道部

[2] 実際の解答は、ここから始めてもよい。

分の相対波動関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ はパリティ変換で変化しない。すなわち、$S=0$ のとき、2 陽子は偶パリティ状態である。
ところで、l 階の球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ はパリティ変換で,

$$Y_l^m(\theta,\varphi)\ \to\ (-1)^l Y_l^m(\theta,\varphi),$$

と変換されるから、l は偶でなければならない。

3(a) 電子のスピンの大きさは $\frac{1}{2}$ である。したがって、軌道角運動量の大きさが L のとき, 全角運動量の大きさ J の取り得る値は

$$J = L+\frac{1}{2},\quad L-\frac{1}{2},$$

である.

(b) 以下では、角運動量演算子を $\hbar$ で割ったものをあらためて同じ記号を使って書くことにする:

$$\hat{\boldsymbol{J}}/\hbar\ \to \hat{\boldsymbol{J}},\quad \hat{\boldsymbol{L}}/\hbar\ \to \hat{\boldsymbol{L}},\quad \hat{\boldsymbol{s}}/\hbar\ \to \hat{\boldsymbol{s}},$$

したがって、

$$\hat{J}_{\pm}\,|J\,M\rangle\ =\ \sqrt{(J\mp M)(J\pm M+1)}\,|J\,M\pm 1\rangle.$$

全角運動量の大きさが J その z 成分が M のときの角運動量の固有ベクトルを $|JM\rangle$ と書くことにする. $L=1$ のときだから J は $\frac{3}{2}$ または $\frac{1}{2}$ である。
$J_z=\frac{3}{2}$ の状態は軌道角運動量とスピンが z 軸方向に平行にそろったときのみ実現されるから、$|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{1/2}$ と書ける.
これに下降演算子 $\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{s}_-$ を掛けると,

$$\hat{J}_-\,|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = (\hat{L}_- + \hat{s}_-)Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{1/2} = \hat{L}_- Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + Y_{11}(\theta,\phi)(\hat{s}_-\chi_{1/2}).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sqrt{(\frac{3}{2}+\frac{3}{2})(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1)}\,|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{3}\,|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle,\\
\text{右辺} &= \sqrt{(1+1)(1-1+1)}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + Y_{11}(\theta,\phi)\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\chi_{-1/2}\\
&= \sqrt{2}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.
\end{aligned}$$

よって、

$$|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.$$

$|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ はこれと直交する規格化された状態ベクトルだから

$$|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.$$

これに,$\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{s}_-$ を掛けると,

$$左辺 = \hat{J}_- \,|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}\,|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle.$$

$$右辺 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{L}_- + \hat{s}_-)Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}}(\hat{L}_- + \hat{s}_-)Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.$$

ここで、

$$\begin{aligned}
(\hat{L}_- + \hat{s}_-)Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} &= \hat{L}_- Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + Y_{10}(\theta,\phi)(\hat{s}_-\chi_{1/2}) \\
&= \sqrt{(1+0)(1-0+1)}Y_{1-1}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{-1/2} \\
&= \sqrt{2}Y_{1-1}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{L}_- + \hat{s}_-)Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{-1/2} &= \hat{L}_- Y_{11}(\theta,\phi)\chi_{-1/2} + Y_{11}(\theta,\phi)(\hat{s}_-\chi_{-1/2}) \\
&= \sqrt{(1+1)(1-1+1)}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{-1/2} \\
&= \sqrt{2}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.
\end{aligned}$$

よって、

$$|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1-1}(\theta,\phi)\chi_{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}}Y_{10}(\theta,\phi)\chi_{-1/2}.$$

これより、

$$\begin{aligned}
(10\,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\,|\frac{1}{2}\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (11\,\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\,|\frac{1}{2}\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\
(1-1\,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\,|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}) &= -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (10\,\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\,|\frac{1}{2}\frac{-1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

[以上]