

以下の問題の解答をA4用紙にまとめ、11月11日(金)午後5時までに学務教務掛(レポートBOX)に提出しなさい。ただし、11月10日の講義時に直接提出してもよい。

1. オブザーバブル A を表す線形演算子 \hat{A} の固有値 a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) に属する規格化された固有ベクトルを $|i\rangle$ とする。ただし、固有値はすべて離散的で縮退はないものとする。すなわち、 $\hat{A}|i\rangle = a_i|i\rangle$, $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ 。
 N 個の線形演算子 \hat{P}_i を次のように定義する; $\hat{P}_i \equiv |i\rangle\langle i|$, ($i = 1, 2, \dots, N$)。
 このとき、次の等式が成り立つことを示しなさい:

$$(i) \hat{P}_i^2 = \hat{P}_i, \quad (ii) [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0. \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

2. 1次元調和振動子の古典力学におけるハミルトニアンは次のように因数分解できる:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \\ &= \hbar\omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right). \end{aligned}$$

- (A) このことをヒントにして、1次元調和振動子量子力学的ハミルトニアン $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ は以下のように書けることを示しなさい:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

ただし、

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}. \dots (*)$$

- (B) $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ と書く。以下の関係式が成り立つことを示しなさい:

$$(1) [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2) [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (3) [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$$

- (C) \hat{H} の固有値 $(n + 1/2)\hbar\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) に属する規格化された固有ベクトルは、 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ と表すことができる。

$\hat{a}|n\rangle \equiv |\psi\rangle$ は0でないベクトルであるとする。

- (1) $\hat{N}|\psi\rangle = (n - 1)|\psi\rangle$, となることを示しなさい。

- (2) (1) の結果より、 $\hat{a}|n\rangle = c_n|n - 1\rangle$, と書くことができる。 $|\psi\rangle$ のノルムが $\langle\psi|\psi\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |c_n|^2$ と書けることを使って、 $c_n = \sqrt{n}$ とできることを示しなさい。(位相を實に選ぶ。)

- (3) 同様にして、 $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ となることを示しなさい。

- (D) (*) より \hat{x} , \hat{p} を \hat{a} および \hat{a}^\dagger を用いて表し、以下の行列要素を求めなさい:

$$(1) \langle l|\hat{x}|n\rangle \quad (2) \langle n|\hat{x}^2|n\rangle \quad (3) \langle n|\hat{p}^2|n\rangle$$