量子力学2 レポート問題

2011 年 11 月 22 日

以下の問題の解答を A4 用紙にまとめ、12 月 2 日（金）午後 5 時までに学部教務掛（レポート BOX）に提出しなさい。

(A) (一般化された) 角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hbar\hat{\boldsymbol{j}}$ と表すとき、$\hat{\boldsymbol{j}} = (\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z)$ は次の交換関係を満たす。ただし、同じダミー添え字については 1 から 3 まで和を取る（アインシュタインの規約.）以下の問題も同様.

$$[\hat{j}_i, \hat{j}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{j}_k. \qquad (*)$$

ここに、ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。$\hat{\boldsymbol{j}}^2$ および $\hat{j}_z$ の規格化された同時固有状態を $|jm\rangle$ と書く:

$$\hat{\boldsymbol{j}}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle, \quad \hat{j}_z|jm\rangle = m|jm\rangle.$$

(a) $(*)$ のみを用いて、$\hat{\boldsymbol{j}}^2$ と $\hat{j}_i$ $(i = x, y, z)$ が可換であることを示しなさい。

(b) $\hat{j}_\pm \equiv \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y$ （複合同順）を定義する。 このとき、以下の問いに答えなさい。

1. 以下の等式を示せ：

$$\text{i)}\ [\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] = \pm\hat{j}_\pm, \quad [\hat{j}_+, \hat{j}_-] = 2\hat{j}_z. \quad \text{ii)}\ \hat{\boldsymbol{j}}^2 = \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z + \hat{j}_z^2 = \hat{j}_+\hat{j}_- - \hat{j}_z + \hat{j}_z^2.$$

2. 定数 $\Gamma\pm$ を用いて、$\hat{j}_\pm|jm\rangle = \Gamma_\pm|jm\pm 1\rangle$ と書くことができることを示し、正の実数の範囲で $\Gamma_\pm$ を求めなさい。

(B) $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ をパウリ行列とする:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. σ_x および σ_y の固有値と固有ベクトルを求めなさい。
2. 以下の等式を示しなさい。ただし、$\mathbf{1}$ は 2x2 単位行列。

$$\text{i)} \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k \quad \text{ii)}\ \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\,\delta_{ij}\mathbf{1}$$

$$\text{iii)} \quad i \neq j \text{ のとき}, \sigma_i\sigma_j = i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k \quad \text{iv)}\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

3. $\boldsymbol{n}$ を 3 次元単位ベクトルとする。$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 1.)$ 以下の等式を示せ:

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{e}^{-i\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-i\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)^k = \cos\frac{\theta}{2}\mathbf{1} - i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\text{(ii)} \qquad \mathrm{e}^{-i\theta\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

[以上]