量子力学2　レポート (2011.11.22) 解答例

(A) (a)

$$\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{j}}^2, \hat{j}_i] &= [\hat{j}_j\hat{j}_j\,, \hat{j}_i] \\
&= \hat{j}_j\,[\hat{j}_j\,, \hat{j}_i] + [\hat{j}_j\,, \hat{j}_i]\,\hat{j}_j \\
&\quad (\because [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B) \\
&= \hat{j}_j(i\epsilon_{jik}\hat{j}_k) + (i\epsilon_{jik}\hat{j}_k)\hat{j}_j \\
&= i\epsilon_{jik}(\hat{j}_j\hat{j}_k + \hat{j}_k\hat{j}_j) \\
&= -i\,\underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\substack{\uparrow \\ j,k\text{ について反対称}}}\,\underbrace{(\hat{j}_j\hat{j}_k + \hat{j}_k\hat{j}_j)}_{\substack{\uparrow \\ j,k\text{ について対称}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) 1. (i)

$$\begin{aligned}
[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] &= [\hat{j}_z, \hat{j}_x \pm i\hat{j}_y] \\
&= [\hat{j}_z, \hat{j}_x] \pm i[\hat{j}_z, \hat{j}_y] \\
&= i\hat{j}_y \pm i(-i\hat{j}_x) \\
&= \pm(\hat{j}_x \pm i\hat{j}_y) \\
&= \pm\hat{j}_\pm,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{j}_+, \hat{j}_-] &= [(\hat{j}_x + i\hat{j}_y), (\hat{j}_x - i\hat{j}_y)] \\
&= [\hat{j}_x, (\hat{j}_x - i\hat{j}_y)] + [i\hat{j}_y, (\hat{j}_x - i\hat{j}_y)] \\
&= [\hat{j}_x, -i\hat{j}_y] + [i\hat{j}_y, \hat{j}_x] \\
&= -i[\hat{j}_x, \hat{j}_y] - i[\hat{j}_x, \hat{j}_y] \\
&= -2i\,[\hat{j}_x, \hat{j}_y] \\
&= -2i \times i\hat{j}_z \\
&= 2\hat{j}_z.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\left\{\begin{aligned}
\hat{j}_x &= \tfrac{1}{2}(\hat{j}_+ + \hat{j}_-) \\
\hat{j}_y &= \tfrac{1}{2i}(\hat{j}_+ - \hat{j}_-)
\end{aligned}\right.$$

なので、

$$\begin{aligned}
\hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 &= \left\{\frac{1}{2}(\hat{j}_+ + \hat{j}_-)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2i}(\hat{j}_+ - \hat{j}_-)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\Big\{(\hat{j}_+^2 + \hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_-^2) - (\hat{j}_+^2 - \hat{j}_+\hat{j}_- - \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_-^2)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\hat{j}_+\hat{j}_- + \hat{j}_-\hat{j}_+) \\
&= \frac{1}{2}([\hat{j}_+, \hat{j}_-] + \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_-\hat{j}_+) \\
&= \hat{j}_z + \hat{j}_-\hat{j}_+,
\end{aligned}$$

また、同様の計算より

$$\hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2 = \hat{j}_+\hat{j}_- - \hat{j}_z.$$

従って、

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{j}}^2 &= (\hat{j}_x^2 + \hat{j}_y^2) + \hat{j}_z^2 \\
&= \begin{cases} \hat{j}_-\hat{j}_+ + \hat{j}_z + \hat{j}_z^2 \\ \hat{j}_+\hat{j}_- - \hat{j}_z + \hat{j}_z^2. \end{cases}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\hat{j}_z(\hat{j}_\pm|j,m\rangle) &= \{[\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] + \hat{j}_\pm\hat{j}_z\}|j,m\rangle \\
&= (\pm\hat{j}_\pm + \hat{j}_\pm\hat{j}_z)|j,m\rangle \qquad (\because \text{ 1. i) より } [\hat{j}_z, \hat{j}_\pm] = \pm\hat{j}_\pm) \\
&= \pm\hat{j}_\pm|j,m\rangle + \hat{j}_\pm(m|j,m\rangle) \qquad (\because \hat{j}_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle) \\
&= (m \pm 1)\,\hat{j}_\pm|j,m\rangle.
\end{aligned}$$

よって

$$\hat{j}_\pm|j,m\rangle = \Gamma_\pm|j,m\pm 1\rangle$$

と書くことができる。
この両辺のノルムを取る；

$$\begin{aligned}
\text{左辺のノルム} &= ||\hat{j}_\pm|j,m\rangle||^2 \\
&= \langle j,m|(\hat{j}_\pm)^\dagger\,\hat{j}_\pm|j,m\rangle,
\end{aligned}$$

ここで、$\hat{\boldsymbol{j}}$ は物理量なので $\hat{\boldsymbol{j}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{j}}$、$\hat{j}_\pm$ の定義より $(\hat{j}_\pm)^\dagger = \hat{j}_\mp$ なので、

$$\begin{aligned}
\text{左辺のノルム} &= \langle j,m|\hat{j}_\mp\hat{j}_\pm|j,m\rangle \\
&= \langle j,m|\Big\{\hat{\boldsymbol{j}}^2 - \hat{j}_z(\hat{j}_z \pm 1)\Big\}|j,m\rangle \qquad (\because \text{ 1. ii) より}) \\
&= \langle j,m|\Big\{j(j+1) - m(m\pm 1)\Big\}|j,m\rangle \\
&= j(j+1) - m(m\pm 1) \\
&= (j \mp m)(j \pm m + 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺のノルム} &= |\Gamma_\pm|^2\langle j,m\pm 1|j,m\pm 1\rangle \\
&= |\Gamma_\pm|^2.
\end{aligned}$$

よって $\Gamma_\pm$ は

$$\Gamma_\pm = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,.$$

(B) 1. σ_x の固有値 λ_x、固有ベクトル v：

固有値 λ_x は

$$\begin{aligned} &0 = \det(\sigma_x - \lambda_x \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda_x & 1 \\ 1 & -\lambda_x \end{pmatrix} = \lambda_x^2 - 1 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_x = \pm 1. \end{aligned}$$

固有値 $\lambda_x = \pm 1$ の固有ベクトル $v_\pm$（符号同順）は、$\sigma_x v_\pm = \pm v_\pm$ より

$$0 = (\sigma_x \mp \mathbf{1}) v_\pm = \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} v_\pm$$

である。よって

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\frac{1}{\sqrt{2}}\text{は規格化定数})$$

σ_y の固有値 λ_y、固有ベクトル w：

固有値 λ_y は

$$\begin{aligned} &0 = \det(\sigma_y - \lambda_y \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda_y & -i \\ i & -\lambda_y \end{pmatrix} = \lambda_y^2 - 1 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_y = \pm 1. \end{aligned}$$

固有値 $\lambda_y = \pm 1$ の固有ベクトル $w_\pm$（符号同順）は、$\sigma_y w_\pm = \pm w_\pm$ より

$$0 = (\sigma_y \mp \mathbf{1}) w_\pm = \begin{pmatrix} \mp 1 & -i \\ i & \mp 1 \end{pmatrix} w_\pm$$

である。よって

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

2. **i)** $i = j$ のときは

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 0, \quad \epsilon_{ijk} = 0$$

より自明。

$i \neq j$ のとき

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2i\sigma_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_y,\sigma_z] &= \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\\
&= 2i\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= 2i\sigma_x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\sigma_z,\sigma_x] &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= 2i\sigma_y.
\end{aligned}$$

ゆえに

$$[\sigma_i,\sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

ii) $i=j$ について

$$\begin{aligned}
\sigma_x^2 &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &&= \mathbf{1},\\
\sigma_y^2 &= \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &&= \mathbf{1},\\
\sigma_z^2 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} &&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

$i \neq j$ については i) での計算を参考にすると、

$$\begin{aligned}
\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y &= \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

よって

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}.$$

iii) i) より、

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

一方 ii) より、$i \neq j$ のとき $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0$ から

$$
\begin{aligned}
[\sigma_i, \sigma_j] &= \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \\
&= \sigma_i\sigma_j - (-\sigma_i\sigma_j) \\
&= 2\sigma_i\sigma_j.
\end{aligned}
$$

両者を比較すると

$$\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

ゆえに $i \neq j$ のとき $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

別解： $\sigma_x\sigma_y$, $\sigma_y\sigma_z$, $\sigma_z\sigma_x$ の行列計算をしても $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ $(i \neq j)$ は確認できる。

iv)

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (A_i\sigma_i)(B_j\sigma_j) = A_iB_j\sigma_i\sigma_j,$$

ここで、ii), iii) より

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbf{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

なので、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}) &= A_iB_j(\delta_{ij}\mathbf{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\mathbf{1} + i\,\underbrace{\epsilon_{kij}A_iB_j}_{=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_k}\,\sigma_k \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\mathbf{1} + i(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\sigma}.
\end{aligned}
$$

備考) i), ii), iii) は、ii) → iii) → i) の順に解くのが最も簡単。

3. **i)**

$$e^{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\Big)^k.$$

この右辺について：
2.iv) より

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\mathbf{1} + i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$$

なので

$$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})^k = \begin{cases} \mathbf{1} & (k = 0, 2, 4, ...) \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} & (k = 1, 3, 5, ...) \end{cases}$$

である。よって

$$\begin{aligned} e^{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{2}\Big)^k \\ &= \mathbf{1}\sum_{k=0,2,4,..}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{-i\theta}{2}\Big)^k + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sum_{k=1,3,5,..}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\frac{-i\theta}{2}\Big)^k \\ &= \mathbf{1}\times\cos\Big(\frac{-\theta}{2}\Big) + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\times i\sin\Big(\frac{-\theta}{2}\Big) \\ &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

ii) $\boldsymbol{n} = (0, 1, 0)$ と選ぶと

$$e^{-i\theta \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2} = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$$

の左辺、右辺はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= e^{-i\theta\sigma_y/2}, \\ \text{右辺} &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y\sin\frac{\theta}{2} \\ &= \cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$e^{-i\theta\sigma_y/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$