2011 年度量子力学 1 試験問題解答例

1.

(a) **領域　I**

$|x| < a$ におけるシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_{\rm I}}{dx^2} + (-V_0)\varphi_{\rm I} = E\varphi_{\rm I}. \tag{1.1}$$

領域　II

$|x| > a$ におけるシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_{\rm II}}{dx^2}\varphi_{\rm II} = E\varphi_{\rm II}. \tag{1.2}$$

(b) 束縛状態なので、

$$\lim_{|x|\to\infty}\varphi_{\rm II}(x) = 0. \tag{1.3}$$

(c) $|x| = a$ におけるポテンシャルの「跳び」は有限なので、波動関数とその微係数が連続である。すなわち、

$$\varphi_{\rm I}(a) = \varphi_{\rm II}(a), \quad \varphi_{\rm I}(-a) = \varphi_{\rm II}(-a), \tag{1.4}$$

$$\varphi'_{\rm I}(a) = \varphi'_{\rm II}(a), \quad \varphi'_{\rm I}(-a) = \varphi'_{\rm II}(-a). \tag{1.5}$$

(d) $V(x)$ の最大値が 0 なので、束縛状態のエネルギー固有値 E は負である。そこで、

$$0 > E \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\kappa^2 \tag{1.6}$$

とおく。

また、一般に $E > -V_0$ が言えるので、

$$(E + V_0) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2, \tag{1.7}$$

とおく。

このとき、

$$k^2 + \kappa^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \tag{1.8}$$

である。

領域 I の解

(1.7) より (1.1) は

$$\frac{d^2\varphi_{\mathrm{I}}}{dx^2} = -k^2\varphi_{\mathrm{I}}, \tag{1.9}$$

と書ける。この方程式の一般解は $A,\ B$ を任意定数として、

$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A\cos kx + B\sin kx. \tag{1.10}$$

このとき、パリティ正の条件より、

$$\varphi_{\mathrm{I}}(-x) = A\cos kx - B\sin kx = \varphi(x) = A\cos kx + B\sin kx.$$

よって、

$$B = 0. \tag{1.11}$$

すなわち、

$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = A\cos kx. \tag{1.12}$$

領域　II の解

$a < x$ におけるシュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi_{\mathrm{II}}}{dx^2} = E\varphi_{\mathrm{II}}. \tag{1.13}$$

(1.6) を用いると、(1.13) は

$$\frac{d^2\varphi_{\mathrm{II}}}{dx^2} = \kappa^2\varphi_{\mathrm{II}}, \tag{1.14}$$

となる。この方程式の一般解は $C,\ D$ を任意定数として、

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = C\mathrm{e}^{-\kappa x} + D\mathrm{e}^{\kappa x}. \tag{1.15}$$

ところが、

$$\lim_{x\to\infty}\varphi_{\mathrm{II}}(x) = 0,$$

より、

$$D = 0. \tag{1.16}$$

よって、$a < x$ のとき、

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = C\mathrm{e}^{-\kappa x}. \tag{1.17}$$

パリティが正の条件より、$x < -a$ のとき、

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = C\mathrm{e}^{\kappa x}. \tag{1.18}$$

(1.17) と (1.18) をまとめて、領域 II の解は

$$\varphi_{\mathrm{II}}(x) = C\mathrm{e}^{-\kappa|x|}, \tag{1.19}$$

と書ける。

$\varphi_{\mathrm{I,\,II}}(-x) = \varphi_{\mathrm{I,\,II}}(x)$ なので、$x = a$ での接続条件のみ考えれば十分である。

$x = a$ での波動関数とその微分係数の連続性から、

$$\begin{aligned} C\cos ka &= D\mathrm{e}^{-\kappa a}, && (1.20)\\ -kC\sin ka &= -\kappa D\mathrm{e}^{-\kappa a}, \\ &\text{すなわち、} \\ kC\sin ka &= \kappa D\mathrm{e}^{-\kappa a}. && (1.21) \end{aligned}$$

(1.21) よりも、これを (1.20) で割った式

$$k\ \tan ka = \kappa, \tag{1.22}$$

の方が係数がなくて便利である。

実際、(1.8) と (1.22) を連立させて κ、すなわちエネルギー固有値を求めることができる。

$$\xi \equiv ka, \quad \eta \equiv \kappa a, \tag{1.23}$$

と定義すると、両方程式は

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}, && (1.24)\\ \xi\tan\xi &= \eta, && (1.25) \end{aligned}$$

となる。

グラフ（省略）の分析より、$\pi < \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} < 2\pi$ のとき、束縛状態が 2 つ存在することが言える。

2.

(a)

$$\psi(x,t=0)\equiv\varphi(x)=N\,\mathrm{e}^{-ax^2}. \tag{3.1}$$

規格化条件は、

$$\begin{aligned}1 &= |N|^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\mathrm{e}^{-2a\,x^2},\\ &= =|N|^2\,\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\mathrm{e}^{-y^2},\\ &= |N|^2\sqrt{\frac{\pi}{2a}}. \end{aligned}\tag{3.2}$$

よって、

$$N=\left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}. \tag{3.3}$$

(b)

1 次元自由粒子のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,\,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,\,t), \tag{3.4}$$

の特解（定常解）は,

$$\psi(x,\,t)=\frac{\mathrm{e}^{i(px-\epsilon_p t)/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\equiv\varphi_p(x,\,t),\quad(-\infty<\,p\,<\infty). \tag{3.5}$$

ただし、

$$\epsilon_p=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}.\quad(p\equiv\hbar k).$$

任意の t に対して $\varphi_p(x,t)$ はデルタ関数型の規格直交系をなしている：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dx\varphi_{p'}^*(x,t)\varphi_p(x,\,t) &= \mathrm{e}^{i(\epsilon_p-\epsilon_{p'})t/\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2\pi\hbar}\mathrm{e}^{i(p-p')x/\hbar}\\ &= \delta(p-p'). \end{aligned}\tag{3.6}$$

さらに、次の完全性条件が成り立っている：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}dp\varphi_p^*(x',0)\varphi_p(x,\,0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi\hbar}\mathrm{e}^{ip(x-x')/\hbar}\\ &= \delta(x-x'). \end{aligned}\tag{3.7}$$

さて、(3.5) で与えられる特解は完全系を成すので、(3.4) の一般解は、$\varphi_p(x,\,t)$ の重ね合わせで表すことができる：

$$\psi(x,\,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, C_p\, \varphi_p(x,\,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, C_p\, \frac{\mathrm{e}^{i(px-\epsilon_p t)/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \tag{3.8}$$

そして、この展開係数 C_p は初期条件 (3.1) から決めることができるのである：実際、(3.1) を (3.8) に代入して、

$$\begin{aligned} N\,\mathrm{e}^{-ax^2} &= \psi(x,\,0), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp'\, C_{p'}\, \varphi_{p'}(x,\,0), \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, C_{p'}\, \mathrm{e}^{ip'x/\hbar}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

これは、フーリエ変換で $\psi(x,\,0)$ を表すことと同値。

左から、$\varphi_p^*(x,\,0)$ を掛けて x について積分し、(3.6) を用いると

$$\begin{aligned} C_p &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, \mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\, N\,\mathrm{e}^{-ax^2}, \\ &= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-ax^2-ikx}, \quad (p=\hbar k). \end{aligned} \tag{3.10}$$

ところが、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-ax^2\pm ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-k^2/4a}. \tag{3.11}$$

よって、

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{-k^2/4a}, \\ &= \frac{N}{\sqrt{2\hbar a}} \mathrm{e}^{-k^2/4a}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

これを (3.8) に代入して、

$$\begin{aligned} \psi(x,\,t) &= \frac{N}{\sqrt{2\hbar a}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \mathrm{e}^{-k^2/4a} \varphi_p(x,\,t), \\ &= \frac{N}{2\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{-k^2/4a+i(kx-\hbar k^2 t/2m)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで、

$$\alpha \equiv \frac{1}{4a} + i\frac{\hbar t}{2m},$$

とおくと、

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{-k^2/4a+i(kx-\hbar k^2 t/2m)}, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \mathrm{e}^{-\alpha k^2+ikx}, \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-x^2/4\alpha}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

よって、

$$\psi(x,\, t) = \frac{N}{2\sqrt{a\pi}} \left(\frac{\pi}{1/4a + i\hbar t/2m}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-x^2/(1/a+2i\hbar t/m)}. \tag{3.15}$$

(c)

(3.15) において、

$$4\alpha = 1/a \,+\, 2i\hbar t/m = \sqrt{a^{-2} + (2\hbar t/m)^2}\mathrm{e}^{i\theta(t)} \equiv A\,\mathrm{e}^{i\theta(t)},$$

ただし、

$$A \equiv \sqrt{a^{-2} + (2\hbar t/m)^2}, \quad \tan\theta \equiv \frac{2a\hbar t}{m}.$$

また、

$$\frac{x^2}{a^{-1} + 2i\hbar t/m} = x^2 \frac{a^{-1} - 2i\hbar t/m}{a^{-2} + (\frac{2\hbar t}{m})^2} = x^2 \left(\frac{1}{a\,A^2} - i\frac{2\hbar t}{mA^2}\right),$$

に注意すると、

$$\psi(x,\, t) = \frac{N}{\sqrt{a}}\, A^{-1/2}\mathrm{e}^{-i\theta(t)/2}\mathrm{e}^{-x^2/aA^2}\mathrm{e}^{i2\hbar t x^2/mA^2} \tag{3.16}$$

よって、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^*(x,\, t) x^2 \psi(x,\, t), \\ &= \frac{N^2}{aA} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 \mathrm{e}^{-2x^2/aA^2}, \\ &= \frac{N^2}{aA} \left(\frac{aA^2}{2}\right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, y^2 \mathrm{e}^{-y^2}, \\ &= \frac{N^2}{2^{3/2}} \sqrt{a} A^2 \Gamma(3/2), \\ &= \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2^{3/2}} \sqrt{a} A^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ &= \frac{aA^2}{4}, \\ &= (4a)^{-1} \left[1 + \left(\frac{2a\hbar t}{m}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{1+\left(\frac{2a\hbar t}{m}\right)^2} \quad \sim \frac{1}{2\sqrt{a}}\frac{2a\hbar t}{m} = \frac{\sqrt{a}\hbar t}{m} \quad (t >> 1), \tag{3.18}$$

となる。すなわち、時間とともに波束は広がっていく。

　このことは以下のように理解できる：最初の状態において位置の不確定は

$$\Delta x \sim 1/2\sqrt{a}$$

であるから、不確定性関係より、

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\Delta x} = \hbar\sqrt{a},$$

の運動量の不確定がある。これは速度に直すと、

$$\Delta v = \frac{\hbar\sqrt{a}}{m},$$

である。したがって、時刻 t では

$$\Delta x \sim \Delta v \times t = \frac{\hbar\sqrt{a}t}{m},$$

の不確定が生まれる。（波束が広がる。）

3.

この系のシュレーディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+V(x)\right]\Psi(x_1,\,x_2)=E_T\,\Psi(x_1,\,x_2). \tag{3.1}$$

重心座標 $X\equiv(m_1x_1+m_2x_2)/M\quad(M\equiv m_1+m_2)$ と相対座標 $x=x_1-x_2$ で微分を書き直す:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x},\\ &= \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial x}, &(3.2)\\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x},\\ &= \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X}-\frac{\partial}{\partial x}. &(3.3)\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{2m_1}\left(\frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{2m_1}{M}\frac{\partial^2}{\partial X\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\\ &= \frac{m_1}{2M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial X\partial x}+\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, &(3.4)\\ \frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{2m_2}\left(\frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}-\frac{2m_2}{M}\frac{\partial^2}{\partial X\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),\\ &= \frac{m_2}{2M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}-\frac{1}{M}\frac{\partial^2}{\partial X\partial x}+\frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. &(3.5)\\ & &(3.6)\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{1}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{m_1+m_2}{2M^2}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2},\\ &= \frac{1}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}. &(3.7)\end{aligned}$$

ただし、μ は次で定義される換算質量である:

$$\frac{1}{\mu}\equiv\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}. \tag{3.8}$$

$\Psi=R(X)\varphi(x)$ と (3.7) を (3.1) に代入すると、

$$-\varphi(x)\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2R(X)}{\partial X^2}-R(X)\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}+V(x)R(X)\varphi(x)=E_T\,R(X)\varphi(x). \tag{3.9}$$

両辺を $R(X)\varphi(x)$ で割り、標準的な変数分離法の議論を行うことにより、

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2 R(X)}{\partial X^2} &= E_X R(X), & (3.10)\\
\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right]\varphi(x) &= E\,\varphi(x), & (3.11)
\end{aligned}
$$

を得る。ただし、$E_T = E_X + E$.

4.

(a)

３階完全反対称テンソル ϵ_{ijk} を用いて、

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k,$$

と書ける。

これを使って、まず次の交換関係を証明する：

$$[\hat{L}_i,\,\hat{x}_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,\hat{x}_k \tag{4.1}$$

$$[\hat{L}_i,\,\hat{p}_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,\hat{p}_k. \tag{4.2}$$

[(4.1) の証明]

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_i,\,\hat{x}_j] &= [\epsilon_{ilk}\hat{x}_l\hat{p}_k, \hat{x}_j],\\
&= \epsilon_{ilk}[\hat{x}_l\hat{p}_k, \hat{x}_j],\\
&= \epsilon_{ilk}\left\{\hat{x}_l[\hat{p}_k, \hat{x}_j] + [\hat{x}_l, \hat{x}_j]\hat{p}_k\right\},\\
&= \epsilon_{ilk}\,\hat{x}_l(-i\hbar)\delta_{kj},\\
&= -i\hbar\epsilon_{ilj}\hat{x}_l,\\
&= i\hbar\epsilon_{ijl}\hat{x}_l.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

[(4.2) の証明]

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_i,\,\hat{p}_j] &= [\epsilon_{ilk}\hat{x}_l\hat{p}_k, \hat{p}_j],\\
&= \epsilon_{ilk}[\hat{x}_l\hat{p}_k, \hat{p}_j],\\
&= \epsilon_{ilk}\left\{\hat{x}_l[\hat{p}_k, \hat{p}_j] + [\hat{x}_l, \hat{p}_j]\hat{p}_k\right\},\\
&= \epsilon_{ilk}\,(i\hbar)\delta_{lj}\hat{p}_k,\\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{p}_k.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

[$\hat{\boldsymbol{L}}$ と $\hat{H}$ の可換性]

$$[\hat{L}_i,\,\hat{H}] = [\hat{L}_i,\,\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m}] + [\hat{L}_i,\,V(r)] = \frac{1}{2m}[\hat{L}_i,\,\hat{\boldsymbol{p}}^2] + [\hat{L}_i,\,V(r)]. \tag{4.5}$$

ところが、

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_i,\,\hat{\boldsymbol{p}}^2] &= [\hat{L}_i,\,\hat{p}_j\,\hat{p}_j]\\
&= \hat{p}_j\,[\hat{L}_i,\,\hat{p}_j] + [\hat{L}_i,\,\hat{p}_j]\,\hat{p}_j\\
&= \hat{p}_j\,(\epsilon_{ijk}\,i\hbar\hat{p}_k) + (\epsilon_{ijk}\,i\hbar\hat{p}_k)\,\hat{p}_j\\
&= i\hbar\hat{p}_j\hat{p}_k\,(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj}) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

一方、

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_i,\, V(r)] &= [\epsilon_{ijk}\, x_j\, \hat{p}_k,\, V(r)] \\
&= \epsilon_{ijk}\, ([\hat{p}_k,\, V(r)] + [x_j,\, V(r)]\hat{p}_k) \\
&= \epsilon_{ijk}\, x_j\, [\hat{p}_k,\, V(r)] \\
&= \epsilon_{ijk}\, x_j\, [-i\hbar\partial_k,\, V(r)] \\
&= \epsilon_{ijk}\, x_j\, (-i\hbar)\, \frac{\partial V(r)}{\partial x_k} \\
&= -i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, x_j\, \frac{x_k}{r}\frac{dV(r)}{dr} \\
&= 0. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

ただし、$\epsilon_{ijk}\, x_j\, x_k = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{ikj})x_j\, x_k = 0,$ を用いた。

以上より、任意の i $(i = x,\, y,\, z)$ に対して,

$$[\hat{L}_i,\, \hat{H}] = 0, \qquad (4.8)$$

が言えた。すなわち、

$$[\hat{\boldsymbol{L}},\, \hat{H}] = 0.$$

(b)

波動関数を $\varphi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\phi)$ とおくと、シュレーディンガー方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2} + V(r)\right]R(r)Y(\theta,\phi) = ER(r)Y(\theta,\phi). \qquad (4.9)$$

ところが、$\hat{\boldsymbol{L}}^2$ が θ と ϕ、およびそれらの微分のみで書けているので、

$$左辺 = -Y\,\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}rR + \frac{R}{2mr^2}\,\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y + V(r)R(r)Y(\theta,\phi),$$

となる。

よって、(4.9) の両辺を RY で割り、通常の変数分離法の議論を適用すると次の二つの方程式を得る：

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y(\theta,\phi) = -\hbar^2[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}]Y(\theta,\phi) &= \lambda Y(\theta,\phi), \qquad (4.10) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}rR + \frac{\lambda}{2mr^2}R + V(r)R(r) &= E\,R(r). \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

$\hat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有値 λ は整数 l $(l \geq 0)$ を用いて、

$$\lambda = l(l+1)\hbar^2,$$

と書ける。s 波というのは、$l=0$ のことであるから、

$$\lambda = 0.$$

これを (4.11) に代入すると,$R(r)$ は次の方程式に従うことが分かる：

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}rR + V(r)R(r) \quad = \quad E\,R(r). \tag{4.12}$$

これに、$V(r)=kr^2/2$ および $R(r)=N\mathrm{e}^{-\alpha r^2}$ を代入すると、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r\mathrm{e}^{-\alpha r^2} + \frac{k}{2}r^2\mathrm{e}^{-\alpha r^2} \quad = \quad E\,\mathrm{e}^{-\alpha r^2}. \tag{4.13}$$

左辺 $=$ 右辺 となるよう定数を決める。

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r\mathrm{e}^{-\alpha r^2} = (-6\alpha + 4\alpha^2 r^2)\mathrm{e}^{-\alpha r^2},$$

より、

1. r^2 の係数を等しいとおいて,

$$\frac{2\hbar^2\alpha^2}{m} = \frac{k}{2}.$$

よって、

$$\alpha = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}. \tag{4.14}$$

2. 定数項を等しいとおいて

$$\frac{3\hbar^2\alpha}{m} = E.$$

ゆえに、

$$E = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4.15}$$

[参考] $k=m\omega^2$ と書くと、

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega,$$

となる。