線形代数学 A 期末試験　2010 年 8 月 5 日　(担当：入谷寛)

注意　答案は結果だけでなく結果に至る過程も詳しく説明すること．答えのみの解答は評価しないことがある．また答えが正しくなくても部分点が与えられる可能性がある．

問 1　次の $(4,4)$ 行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を求めよ．

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) V を $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ を基底に持つ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to V$ を基底 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ に関して上の行列 A で表される線形写像とする．別の基底 $\{e_1+e_2, e_2+e_3, e_3+e_4, e_4\}$ に関する f の行列表示を求めよ．

問 2　W を実数係数の 3 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする．

$$W = \left\{ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して写像 $\Phi_a\colon W \to W$ を次で定義する．

$$\Phi_a(P(x)) = axP'(x) + P'(a)x$$

ここで $P'(x)$ は $P(x)$ の導関数を表す．

(1) Φ_a は $\mathbb{R}$ 上の線形写像であることを示せ．

(2) W の基底 $\{1, x, x^2, x^3\}$ に関する線形写像 Φ_a の行列表示を求めよ．

(3) $\operatorname{rank}\Phi_a$ を求めよ．(答えは a の値に依存する)

(4) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $W = \operatorname{Ker}\Phi_a \oplus \operatorname{Im}\Phi_a$ を証明せよ．

問 3　次の命題が正しければ証明を与え，間違いならば反例を与えよ．ただし V, W は体 K 上のベクトル空間とする．

(1) K 上の線形写像 $f\colon V \to W$ と V のベクトル $v_1, \ldots, v_n$ に対して $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ が一次独立ならば $\{v_1, \ldots, v_n\}$ も一次独立である．

(2) $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ が W の基底であるとき，任意のベクトル $w_0 \in W$ に対して $\{w_0+w_1, w_0+w_2, \ldots, w_0+w_m\}$ は W の基底である．

問 4 (採点対象外) 授業に対する感想や要望などあれば書いてください．