線形代数 B 期末試験　2010 年 1 月 27 日実施　(担当：入谷)

注意　答案は結果だけでなく結果に至る過程も詳しく説明すること．答えのみの解答は評価しないことがある．

問 1　$M_2(\mathbb{C})$ を複素成分の 2 次正方行列全体のなすベクトル空間とする．

(1) $M_2(\mathbb{C})$ の内積を $(A,B)=\mathrm{tr}(AB^*)$ で定義するとき，これは内積の性質を全て満たすことを証明せよ．

(2) 次の $M_2(\mathbb{C})$ の元 A_1, A_2, A_3 に対して，この順序の通り Schmidt の直交化を施し，(1) の内積に関する正規直交系を求めよ．

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}i & i\\ i & -i\end{pmatrix}\quad A_3=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(3) 2 次正方行列 A に対して $g_A\colon M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C})$ を $g_A(X)=[A,X]$ で定める．ここで $[A,X]=AX-XA$ である．(1) で与えた内積に関する g_A の随伴写像 g_A^* を求めよ．

(4) A が正規行列であるとき g_A は正規変換であることを示せ．

問 2　次に与える行列の各々について固有多項式と Jordan 標準形，さらに最小多項式を求めよ．

(1)

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(2)

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(3)

$$C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

問 3　n 次の実対称行列 A について次が同値であることを示せ．

(1) A は半正定値である．つまり任意の $v\in\mathbb{R}^n$ に対して ${}^t vAv\geq 0$.

(2) ある n 次実対称行列 B が存在して $A=B^2$ と書ける．