線形代数学続論 予備テスト　(担当教員： 稲場 道明)

問題 1. 以下の複素数係数の正方行列 A のジョルダン標準形を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また A の最小多項式も求め, 実際に最小多項式に A を代入して 0 となることを確かめよ.

問題 2. $\mathbb{C}[t]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の一変数多項式環とする. 以下の $\mathbb{C}[t]$-加群はどれとどれが同型でどれとどれが同型でないか理由を込めて答えよ.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^2(t+1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^3 \\
M_2 &:= \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^2(t+1)^3 \\
M_3 &:= \mathbb{C}[t]/(t^2) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)(t+1)^3 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^4 \\
M_4 &:= \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^5(t+1)^3)
\end{aligned}$$

NO. /

DATE

問題1

$$tI_4 - A = \begin{pmatrix} t & 0 & -1 & 0 \\ -3 & t & 0 & -1 \\ 4 & 0 & t & 2 \\ 0 & -2 & -1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1列と3列を交換}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & -3 & -1 \\ t & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1列のt倍を3列に加える}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -3 & -1 \\ t & 0 & t^2+4 & 2 \\ -1 & -2 & -t & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1行のt倍を3行に, 1行の-1倍を4行に加える}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -3 & -1 \\ 0 & 0 & t^2+4 & 2 \\ 0 & -2 & -t & t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2列と4列を交換}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & t \\ 0 & 2 & t^2+4 & 0 \\ 0 & t & -t & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2列の2倍を3行に加え, 2行目のt倍を4行に加える.}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & t \\ 0 & 0 & t^2-2 & 2t \\ 0 & 0 & -4t & t^2-2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-2 & 2t \\ 0 & 0 & -4t & t^2-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3行の}-\frac{1}{2}t\text{倍を4行に加える}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-2 & 2t \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}t(t^2-2)+4t & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t^2-4 & t \\ 0 & 0 & -t^3-6t & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3列と4列を交換}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 2t^2-4 \\ 0 & 0 & -1 & -t^3-6t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3行と4行を交換}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -t^3-6t \\ 0 & 0 & t & 2t^2-4t \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3行のt倍を4行に加える}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -t^3-6t \\ 0 & 0 & 0 & -t^4-6t^2+2t-4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^4-6t^2+2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (t+\sqrt{2}i)^2(t-\sqrt{2}i)^2 \end{pmatrix}$$

以上より $\mathbb{C}[t]^{\oplus 4}/\mathrm{Im}(tI_4 - A) \cong \mathbb{C}[t]/(t+\sqrt{2}i)^2(t-\sqrt{2}i)^2$

$\because$中国式剰余定理 $\longrightarrow \cong \mathbb{C}[t]/(t+\sqrt{2}i)^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-\sqrt{2}i)^2$

よってAのJordan標準形は

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2}i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

Aの最小多項式は $\varphi_A(t) = (t+\sqrt{2}i)^2(t-\sqrt{2}i)^2 = (t^2+2)^2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ となる

$$\varphi_A(A) = (A + 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 2.

中国式剰余定理より

$$M_1 \cong \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^2(t+1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^3$$
$$\cong \mathbb{C}[t]/t^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1)^3 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^3$$

$$M_2 = \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^2(t+1)^3$$
$$\cong \mathbb{C}[t]/t^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^3 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1)^3$$

$$M_3 = \mathbb{C}[t]/(t^2) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)(t+1)^3 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^4. \qquad \therefore M_1 \cong M_2$$
$$\cong \mathbb{C}[t]/(t^2) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1) \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1)^3 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^4$$

$$M_4 = \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^5(t+1)^3) \cong \mathbb{C}[t]/t^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^5 \oplus \mathbb{C}[t]/(t+1)$$

$$M_4/(t-1)M_4 \cong \mathbb{C}[t]/(t-1)$$

$$M_1/(t-1)M_1 \cong \mathbb{C}[t]/(t-1) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)$$

$$M_3/(t-1)M_3 \cong \mathbb{C}[t]/(t-1) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)$$

$M_4 \not\cong M_1$, $M_4 \not\cong M_3$.

$\forall v \in M_1$ に対し, $t^2(t+1)^3(t-1)^3 v = 0$

$e_4 := \overline{1} \in \mathbb{C}[t]/(t-1)^4 \subseteq M_3$

$t^2(t+1)^3\underbrace{(t-1)^3 e_4}_{\neq 0} \neq 0$

$\therefore$ $M_3 \not\cong M_1$ となる. 以上より $M_1 \cong M_2 \not\cong M_3 \not\cong M_4 \not\cong M_1$