線形代数学続論 定期試験 (月曜4限) (担当教員： 稲場 道明)

問題 1. 以下の複素数係数の正方行列 A のジョルダン標準形を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

また A の最小多項式も求め，実際に最小多項式に A を代入して 0 となることを確かめよ．

問題 2. $\mathbb{C}[t]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の一変数多項式環とする．以下の $\mathbb{C}[t]$-加群はどれとどれが同型でどれとどれが同型でないか理由を込めて答えよ．

$$M_1 := \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^3(t-2)^2(-t)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-2)^3$$
$$M_2 := \mathbb{C}[t]/(t^2(t-2)^3(-t)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^3(t-2)^2$$
$$M_3 := \mathbb{C}[t]/(t^2)(t-2)^3 \oplus \mathbb{C}[t]/(t-1)^3(t-2)^2(-t)^3$$
$$M_4 := \mathbb{C}[t]/(t^5(t-1)^3(t-2)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-2) \oplus \mathbb{C}[t]/(t-2)$$

問題 3. V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$f : V \to V$ を線形写像とする．f の固有多項式を $\chi_f(t) \in \mathbb{C}[t]$ とし，f の最小多項式を $\varphi_f(t) \in \mathbb{C}[t]$ とする．ただし $\varphi_f(t)$ の最高次係数は 1 としておく．このとき

$$\varphi_f(t) = \chi_f(t) \Leftrightarrow \text{「}\exists e \in V, \forall v \in V, \exists p(t) \in \mathbb{C}[t], v = p(f)e\text{」}$$

となることを示せ．

問題 4. V と W を体 K 上の有限次元ベクトル空間とする．V^*, W^* をそれぞれ V, W の双対ベクトル空間とする．

$$U := \{\varphi : V \times W \to K; K\text{-双線形写像}\}$$

に自然に定まる加法とスカラー倍によるベクトル空間の構造を考える．この時，$V^* \otimes_K W^*$ と U との間には自然な同型写像 (つまり基底の取り方によらない同型写像) が存在することを示せ．