線形代数学続論 定期試験 (火曜4限) (担当教員： 稲場 道明)

問題 1. 以下の複素数係数の正方行列 A のジョルダン標準形を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また A の最小多項式も求め, 実際に最小多項式に A を代入して 0 となることを確かめよ．

問題 2. $\mathbb{C}[t]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の一変数多項式環とする．以下の $\mathbb{C}[t]$-加群はどれとどれが同型でどれとどれが同型でないか理由を込めて答えよ．

$$\begin{aligned} M_1 &:= \mathbb{C}[t]/(t(t-1)^2(t+1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(t(t-1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(-t)^3 \\ M_2 &:= \mathbb{C}[t]/(t^2(t-1)^3) \oplus \mathbb{C}[t]/(-t)^3(t-1)^2(t+1)^3 \\ M_3 &:= \mathbb{C}[t]/(t^2)(t+1)^3(t-1)^2 \oplus \mathbb{C}[t]/(-t)^3(t-1)^3 \\ M_4 &:= \mathbb{C}[t]/(t^5(t-1)^5(t+1)^3) \end{aligned}$$

問題 3. A を有理数係数の n 次正方行列とする．A を複素数係数の行列とみなした時の最小多項式を $\varphi_A(t) \in \mathbb{C}[t]$ とする．ただし $\varphi_A(t)$ の最高次係数は 1 としておく．このとき $\varphi_A(t) \in \mathbb{Q}[t]$, 即ち $\varphi_A(t)$ は有理数係数の多項式であることを示せ．

問題 4. V と W を体 K 上の有限次元ベクトル空間とし,

$$\varphi : V \times W \longrightarrow K$$

を双線形写像で,

(1) $v \in V$ について, 任意の $w \in W$ に対して $\varphi(v, w) = 0$ を満たせば, $v = 0$,

(2) $w \in W$ について, 任意の $v \in V$ に対して $\varphi(v, w) = 0$ を満たせば, $w = 0$

という条件を満たすとする．この時, V と W^* との間に自然な同型写像 (つまり基底の取り方によらず, φ のみに依存する同型写像) が存在することを示せ．ただし W^* は W の双対ベクトル空間を意味する．