集合と位相：テスト

2011/7/25

$\boxed{0}$ $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ を考える．X の濃度を求めたい．

0. $f, g \in X$ があったとき，すべての有理数 $r \in \mathbb{Q}$ にたいして $f(r) = g(r)$ ならば $f = g$ を示せ．これより X の濃度について $|\mathbb{R}| \le |X| \le |\mathrm{Map}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})|$ を示せ．

   $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ だったので $|\mathbb{R}| \le |X| \le |\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R})|$ となる．

1. $|\mathbb{R}| = |\mathrm{Map}(\mathbb{N}, 2)|$ だったので，$|\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R})| = |\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathrm{Map}(\mathbb{N}, 2))|$ となるが，全単射 $\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathrm{Map}(\mathbb{N}, 2)) \cong \mathrm{Map}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, 2)$ と濃度の同型 $|\mathrm{Map}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, 2)| = |\mathrm{Map}(\mathbb{N}, 2)|$ を示せ．

   結論として $|\mathbb{R}| = |X|$.

$\boxed{1}$ 指数 Λ をもつ位相空間族 X_λ について各 X_λ がハウスドルフ空間とする．弱位相を入れた積空間 $\prod X_\lambda$ を考える．これがハウスドルフ空間になることを示したい．

0. $\Lambda = 2$ のとき，つまり 2 つのハウスドルフ空間 X_0, X_1 の積がまたハウスドルフ空間になることを示せ．

1. 任意の指数 Λ について $\prod X_\lambda$ がハウスドルフ空間になることを示せ．

$\boxed{2}$

0. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続であることと，すべての収束する単調増加あるいは単調減少列 $x_n \to x$ について $f(x_n)$ が $f(x)$ に収束することが同値になることを示せ．

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を順序を保つ全単射とする．f は $\mathbb{R}$ の通常の位相で同相写像になることを示せ．

$\boxed{3}$ 実数の列による集合 $l^\infty = \{(x_n)_{n=0}^\infty \mid \sup_n(|x_n|) < +\infty\}$ を考える．これは $d((x_n), (y_n)) = \sup_n(|x_n - y_n|)$ によって距離空間になることは認めよう．原点 O とはすべての x_n が 0 となる l^∞ の点とする．このとき球面の類似である有界集合 $S = \{x \in l^\infty \mid d(x, O) = 1\}$ が考えられるが，この S は全有界にはならないことを示せ．