特殊相対論問題（阪上）

2012年1月24日

[1] 真空中の Maxwell 方程式は，電場 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$，磁場 $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$，電荷密度 ρ、電流密度 $\boldsymbol{j}=(j_x,j_y,j_z)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\rho/\epsilon_0\\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{B}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{j}\\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0\\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0
\end{aligned}
$$

と与えられる．ただし，ϵ_0,μ_0 は真空の誘電率，透磁率であり　1 2 3 4
4 2 3 1

$$\epsilon_0\mu_0=1/c^2,\qquad c:\text{光速度}$$

を満たす．特殊相対論では電場と磁場は電磁場テンソル，　4 2 1 3

$$
f_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y\\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x\\ E_z/c & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}
$$

また電荷と電流は４元電流ベクトル

$$j^\mu=(c\rho,j_x,j_y,j_z)$$

を用いて表されることが知られている．

このとき Maxwell 方程式が次のように Lorentz 共変な形に書き換えられることを示しなさい．

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu f^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\mu\\
\partial_\nu {}^*f^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}
$$

ただし，${}^*f^{\mu\nu}$ は４階完全反対称テンソル密度 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いて

$${}^*f^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\rho\sigma}$$

と定義される．

$$
{}^*f^{\nu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B_x & -B_y & -B_z\\ B_x & 0 & & \\ B_y & -E_z/c & 0 & \\ B_z & -E_y/c & & 0\end{pmatrix}
$$

[2] 座標系 S (t,x,y,z) に対して x 方向に相対速度 v で運動している座標系 S' (t',x',y',z') を考える．光速度不変の原理から Lorentz 変換 (boost)

時空図をかく

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma(ct-\beta x), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c \\
x' &= \gamma(x-\beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z
\end{aligned}
$$

が導かれる．この boost を用いて，(1) 同時刻の相対性および (2)Lorentz 収縮の２つを説明しなさい。

[3] 下図のような振動数 ν，波長 λ の光子と静止している電子の $x-y$ 平面内での衝突（コンプトン散乱）を考える．衝突により光子は x 軸からの角度 θ の方向に散乱され，振動数 ν'，波長 λ' に変化した．また電子の質量は m，プランク定数を h とする．以下の設問に答えなさい．

(a) ある粒子のエネルギーを E，運動量を $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$ とすると４元運動量は $p^\mu=(E/c,p_x,p_y,p_z)$ で与えられる．衝突前の光子と電子の４元運動量を p^μ, q^μ，衝突後の光子と電子の４元運動量を p'^μ, q'^μ とする．このとき

$$
p^\mu = \left(\frac{h}{\lambda}, \frac{h}{\lambda}, 0, 0\right), \quad q^\mu = (mc,0,0,0), \quad p'^\mu = \left(\frac{h}{\lambda'}, \frac{h}{\lambda'}\cos\theta, \frac{h}{\lambda'}\sin\theta, 0\right)
$$

と与えられることを示しなさい．

(b) 光子の質量がゼロであることを示しなさい．

(c) ４元運動量の保存則, $p^\mu+q^\mu=p'^\mu+q'^\mu$ から衝突前後での波長の関係式

$$
\lambda'-\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)
$$

を導きなさい．